Министерство образования Республики Беларусь

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

**Е.А. Ровба, Е.А. Сетько,
А.С. Ляликов, К.А. Смотрицкий**

# Высшая математика

*Лекции
по одноименному курсу
для студентов
экономических специальностей*

Гродно
ГрГУ им. Я. Купалы
2012

# Оглавление

**Предисловие** . . . . . 9

**Введение** . . . . . 12

**В.1. Базовые понятия математики** . . . . . 12

В.1.1. Представление о математической логике . . . . . 12
В.1.2. Общее понятие множества . . . . . 13
В.1.3. Числовые множества . . . . . 14

**В.2. Декартова система координат** . . . . . 16

В.2.1. Декартовы координаты на прямой . . . . . 16
В.2.2. Декартовы координаты на плоскости . . . . . 17
В.2.3. Декартовы координаты в пространстве . . . . . 18

**В.3. Метод математической индукции** . . . . . 19

В.3.1. Дедукция и индукция в математике . . . . . 19
В.3.2. Суммы и прогрессии . . . . . 20
В.3.3. Произведения и факториалы . . . . . 22
В.3.4. Бином Ньютона . . . . . 23

**Глава 1. Линейная алгебра** . . . . . 26

**1.1. Матрицы и определители** . . . . . 26

1.1.1. Понятие матрицы. Виды матриц . . . . . 26
1.1.2. Операции над матрицами . . . . . 28
1.1.3. Определители низших порядков . . . . . 32
1.1.4. Определители произвольного порядка . . . . . 34
1.1.5. Свойства определителей . . . . . 37
1.1.6. Элементарные преобразования . . . . . 39
1.1.7. Обратная матрица . . . . . 40
1.1.8. Матричные уравнения . . . . . 44
1.1.9. Ранг матрицы . . . . . 46

**1.2. Системы линейных алгебраических уравнений** . . . 48
1.2.1. Основные понятия . . . 48
1.2.2. Матричный метод . . . 50
1.2.3. Метод Крамера . . . 52
1.2.4. Метод Гаусса . . . 54
1.2.5. Критерий Кронекера — Капелли . . . 58
1.2.6. Экономическая модель Леонтьева . . . 61

**1.3. Векторная алгебра** . . . 64
1.3.1. Векторы в пространстве . . . 64
1.3.2. Алгебраическое описание вектора . . . 66
1.3.3. Скалярное произведение векторов . . . 68
1.3.4. $n$-мерное векторное пространство . . . 70
1.3.5. Линейная зависимость векторов . . . 72
1.3.6. Базис и ранг системы векторов . . . 75
1.3.7. Базис пространства . . . 78
1.3.8. Ортогональные системы векторов . . . 81
1.3.9. Собственные векторы и собственные значения . . . 85

**Глава 2. Аналитическая геометрия** . . . 89

**2.1. Прямая на плоскости** . . . 89
2.1.1. Простейшие задачи . . . 89
2.1.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом . . . 91
2.1.3. Составление уравнений прямых . . . 93
2.1.4. Общее уравнение прямой . . . 94
2.1.5. Уравнение прямой «в отрезках» . . . 96
2.1.6. Угол между двумя прямыми . . . 96
2.1.7. Условия параллельности и перпендикулярности . . . 98
2.1.8. Расстояние от точки до прямой . . . 99
2.1.9. Взаимное расположение двух прямых на плоскости . 99

**2.2. Кривые второго порядка** . . . 100
2.2.1. Окружность . . . 100
2.2.2. Эллипс . . . 101
2.2.3. Гипербола . . . 105
2.2.4. Парабола . . . 111
2.2.5. Кривые второго порядка со смещенным центром . . 114

**Глава 3. Предел последовательности и функции** . . . 116

**3.1. Числовая последовательность** . . . 116
3.1.1. Понятие числовой последовательности . . . 116



3.1.2. Предел последовательности . . . 118
3.1.3. Бесконечно малые последовательности . . . 120
3.1.4. Бесконечно большие последовательности . . . 122
3.1.5. Сходящиеся последовательности . . . 124
3.1.6. Предельный переход в неравенствах . . . 127
3.1.7. Монотонные последовательности . . . 128
3.1.8. Непрерывное начисление процентов . . . 131

**3.2. Функциональная зависимость** . . . 133
3.2.1. Понятие функции . . . 133
3.2.2. Способы задания функции . . . 135
3.2.3. Понятия обратной и сложной функций . . . 139
3.2.4. Элементарные функции . . . 141
3.2.5. Основные характеристики функций . . . 145
3.2.6. Построение графиков функций . . . 146
3.2.7. Функциональная зависимость в экономике . . . 149

**3.3. Предел функции. Два замечательных предела** . . . 150
3.3.1. Предел функции по Гейне . . . 150
3.3.2. Предел функции по Коши . . . 153
3.3.3. Односторонние пределы . . . 154
3.3.4. Бесконечно малые функции . . . 156
3.3.5. Бесконечно большие функции . . . 158
3.3.6. Свойства предела функции . . . 159
3.3.7. Замечательные пределы . . . 164
3.3.8. Эквивалентные бесконечно малые функции . . . 166

**3.4. Непрерывные функции** . . . 168
3.4.1. Непрерывность функции в точке . . . 168
3.4.2. Теоремы о непрерывных в точке функциях . . . 171
3.4.3. Точки разрыва и их классификация . . . 172
3.4.4. Непрерывность элементарных функций . . . 174
3.4.5. Раскрытие неопределенностей . . . 177
3.4.6. Теоремы о непрерывных на отрезке функциях . . . 181

**Глава 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной** . . . 184

**4.1. Производная функции** . . . 184
4.1.1. Понятие производной . . . 184
4.1.2. Геометрический смысл производной . . . 186
4.1.3. Физический смысл производной . . . 189
4.1.4. Правила дифференцирования . . . 189

4.1.5. Таблица производных основных элементарных функций. Производная сложной и обратной функций . . . 191
4.1.6. Логарифмическая производная . . . 198
4.1.7. Производная неявной функции . . . 199
4.1.8. Производные высших порядков . . . 199
4.1.9. Применение производной в экономике . . . 202
**4.2. Дифференцируемость функции** . . . 204
4.2.1. Понятие дифференцируемости функции в точке . . . 204
4.2.2. Дифференциал функции и приближенные вычисления с помощью дифференциала . . . 205
4.2.3. Геометрический смысл дифференциала . . . 207
4.2.4. Основные теоремы о дифференцируемых функциях 208
**4.3. Правило Лопиталя. Понятие о формуле Тейлора** . . 211
4.3.1. Правило Лопиталя . . . 211
4.3.2. Понятие о формуле Тейлора . . . 214
**4.4. Исследование функции с помощью производной** . . 217
4.4.1. Условие постоянства функции . . . 217
4.4.2. Достаточное условие монотонности функции . . . 217
4.4.3. Необходимые и достаточные условия локального экстремума . . . 218
4.4.4. Наибольшее и наименьшее значения функции . . . 221
4.4.5. Выпуклые функции . . . 222
4.4.6. Асимптоты графика функции . . . 224
4.4.7. Общая схема исследования поведения функций и построения графиков функций . . . 226

**Глава 5. Теория интегрирования** . . . 229
**5.1. Неопределенный интеграл** . . . 229
5.1.1. Первообразная . . . 229
5.1.2. Неопределенный интеграл . . . 230
5.1.3. Таблица интегралов . . . 234
5.1.4. Простейшие методы интегрирования . . . 235
**5.2. Интегрирование некоторых классов функций** . . . 244
5.2.1. Интегрирование рациональных функций . . . 244
5.2.2. Интегрирование иррациональных функций . . . 248
5.2.3. Тригонометрические интегралы . . . 254
**5.3. Определенный интеграл** . . . 256
5.3.1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции . . . 256



5.3.2. Свойства определенного интеграла . . . 260
5.3.3. Оценки интегралов. Теорема о среднем значении . . 262
5.3.4. Необходимое условие интегрируемости функции . . . 265
5.3.5. Достаточные условия интегрируемости . . . 267
5.3.6. Интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной для непрерывной функции 267
5.3.7. Формула Ньютона — Лейбница . . . 270
5.3.8. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле . . . 271
**5.4. Приложения определенного интеграла** . . . 274
5.4.1. Площадь криволинейной трапеции . . . 274
5.4.2. Длина дуги кривой . . . 275
5.4.3. Объем тела вращения . . . 278
5.4.4. Использование понятия определенного интеграла в экономике . . . 280
**5.5. Несобственные интегралы** . . . 286
5.5.1. Обобщение понятия определенного интеграла . . . 286
5.5.2. Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования . . . 286
5.5.3. Интегралы от неограниченных функций . . . 290

**Глава 6. Дифференцирование функций двух переменных** . . . 294
**6.1. Функция двух переменных. Дифференциал** . . . 294
6.1.1. Определения . . . 294
6.1.2. Предел функции двух переменных . . . 297
6.1.3. Непрерывность функции двух переменных . . . 301
6.1.4. Частные производные . . . 303
6.1.5. Частные производные высших порядков . . . 305
6.1.6. Дифференцируемость и дифференциал . . . 306
6.1.7. Производная сложной функции . . . 309
6.1.8. Производная по направлению. Градиент . . . 310
6.1.9. Производственная функция Кобба — Дугласа . . . 315
**6.2. Экстремум функции двух переменных** . . . 318
6.2.1. Локальный экстремум . . . 318
6.2.2. Глобальный экстремум . . . 321
6.2.3. Условный экстремум . . . 324
6.2.4. Метод множителей Лагранжа . . . 326
6.2.5. Экстремум выпуклых функций . . . 327
6.2.6. Функция полезности . . . 329

**Глава 7. Дифференциальные уравнения** . . . . . 334
**7.1. Дифференциальные уравнения первого порядка** . . 334
7.1.1. Общее дифференциальное уравнение первого порядка 334
7.1.2. Составление дифференциальных уравнений . . . . . 339
7.1.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными . . . . . 340
**7.2. Решение уравнений первого порядка** . . . . . 342
7.2.1. Однородные уравнения . . . . . 342
7.2.2. Линейные уравнения . . . . . 344
7.2.3. Уравнение Бернулли . . . . . 346
**7.3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами** . . . . . 347
7.3.1. Уравнения второго порядка. Общие понятия . . . . . 347
7.3.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами 349
7.3.3. Метод Эйлера решения однородного уравнения . . . 350
7.3.4. Решение неоднородного уравнения. Метод вариации произвольных постоянных . . . . . 352
7.3.5. Метод нахождения частного решения неоднородного уравнения со специальной правой частью . . . . . 353
7.3.6. Приложение уравнений второго порядка в экономике 356

**Глава 8. Ряды** . . . . . 357
**8.1. Числовые ряды** . . . . . 357
8.1.1. Понятие числового ряда . . . . . 357
8.1.2. Необходимое условие сходимости числового ряда . . 360
8.1.3. Достаточные условия сходимости . . . . . 362
8.1.4. Абсолютная и условная сходимость . . . . . 367
8.1.5. Приложения рядов в экономике . . . . . 368
**8.2. Функциональные ряды** . . . . . 369
8.2.1. Основные определения. Область сходимости . . . . . 369
8.2.2. Степенные ряды . . . . . 372
8.2.3. Разложение функций в степенные ряды . . . . . 378
8.2.4. Разложение некоторых функций в ряд Маклорена . 381

**Рекомендуемая литература** . . . . . 383

**Предметный указатель** . . . . . 385

**Список основных сокращений** . . . . . 390

# Предисловие

Поступая в высшие учебные заведения на экономические специальности, абитуриенты часто недооценивают значение математических методов в экономической науке. Читаемый на первом году обучения курс высшей математики лежит в основе подготовки специалистов в области экономики и закладывает фундамент, необходимый для построения основных экономических дисциплин, а также ориентированных на экономические приложения математических дисциплин, изучаемых на старших курсах.

Данная книга является теоретической частью комплекса по дисциплине «Высшая математика» для студентов экономических специальностей. Комплекс включает также задачник для практических занятий и самостоятельной работы студентов. Обе части неразрывно связаны между собой и подготовлены одним и тем же коллективом авторов на основе многолетнего опыта чтения лекций и проведения семинарских занятий по высшей математике.

Материал комплекса содержит следующие темы, оформленные в виде глав:

1) аналитическая геометрия, где рассматриваются декартова система координат, прямая на плоскости, кривые второго порядка;

2) предел последовательности и функции, где вводятся и подвергаются исследованию фундаментальные для математического анализа понятия предела и непрерывности;

3) теория дифференцирования, где дается понятие производной функции;

4) теория интегрирования, посвященная исследованию и приложениям неопределенного, определенного и несобственного интегралов;

5) дифференцирование функций двух переменных, где выводится обобщение понятия производной на случай функций двух переменных;

6) теория дифференциальных уравнений, содержащая материал по различным видам уравнений первого порядка, а также линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами и методам их решения;

7) теория рядов, развивающая идеи сходимости, заложенные при рассмотрении теории пределов, и дающая представление о числовых и функциональных рядах, разложении функций в степенные ряды;

8) линейная алгебра, включающая теорию матриц, определителей и систем линейных уравнений, а также вопросы векторной алгебры.

Теоретический материал сопровождается решениями задач основных типов.

В предлагаемом учебном пособии большое внимание уделено экономическим приложениям рассматриваемых математических методов, что естественным образом дополняет изучаемые в дальнейшем курсы математического программирования, методов математического моделирования, экономической теории, микроэкономики. Даются приложения функциональной зависимости в экономике. При этом рассматриваются функции не только одной переменной (например, функции спроса и предложения), но и многих переменных (функция полезности и производственная функция Кобба — Дугласа). В пособии читатель может ознакомиться с применением производной и интеграла в экономике, задачей о непрерывном начислении процентов, свойствами экстремума выпуклых функций, макромоделью Домара, моделью Леонтьева межотраслевого баланса. Авторы надеются, что подробное рассмотрение широкого класса экономических приложений усилит мотивацию изучения высшей математики, повысит интерес к этой дисциплине, научит строить математические модели, применять их для исследования реальных экономических процессов и решения профессиональных задач.

Каждая глава учебного пособия содержит материал по различным разделам математики. Главы состоят из параграфов, примерно



соответствующих одной лекции. Параграфы разбиваются на подпараграфы, посвященные рассмотрению отдельных вопросов, минимальных по объему, но замкнутых по содержанию. Пособие снабжено предметным указателем и списком основных математических обозначений. Во всей работе используется двойная нумерация формул и других объектов. Первое число обозначает номер главы, содержащей данный объект, второе — номер объекта внутри этой главы. В конце доказательств теорем и решений задач для удобства читателя ставится знак □.

Авторы стремились выработать такой стиль изложения материала, при котором основной упор делается на доступность, но при этом сохраняется разумный уровень математической строгости. Успешному усвоению материала должно способствовать значительное количество иллюстраций. В книге нет громоздких или повторяющихся по своим идеям доказательств. Вместе с тем основные теоремы тщательно проработаны и обоснованы.

Данное учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов экономических специальностей дневной, заочной и дистанционной форм обучения. Авторы надеются, что оно поможет развить у студентов способность к абстрактному мышлению и превратить математику в орудие познания окружающего мира.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам — коллективу кафедры высшей математики Белорусского государственного экономического университета (особо заведующему кафедрой доктору физико-математических наук, профессору М.П. Дымкову) и заведующему кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктору физико-математических наук, профессору В.Г. Кротову, — замечания и рекомендации которых способствовали улучшению учебного пособия.

Все отзывы и предложения просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220048, Минск.

*Авторы*

# Введение

## B.1. Базовые понятия математики

### B.1.1. Представление о математической логике

В математике для записи понятий, утверждений используется специальная логическая символика. Так, запись

$\alpha \Rightarrow \beta$ означает, что из предложения $\alpha$ следует предложение $\beta$;

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает, что из $\alpha$ следует $\beta$ и из $\beta$ следует $\alpha$, т.е. предложения $\alpha$ и $\beta$ равносильные.

Символ $\forall$[1], называемый *квантором всеобщности*, читается: «для любого», «для всех», «для каждого», «каково бы ни было». Символ $\exists$[2] называется *квантором существования* и используется вместо слов «существует», «найдется».

Теоремы в математике обычно имеют структуру, выражаемую формулой

$$\alpha \Rightarrow \beta.$$

При этом утверждение $\alpha$ называется *условием теоремы*, а $\beta$ — ее *заключением*. В этом случае также говорят, что заключение $\beta$ является *необходимым* для выполнения условия $\alpha$ и что условие $\alpha$ является *достаточным* для выполнения заключения $\beta$.

Пусть, например, утверждение $\alpha$ состоит в том, что Вася учится на факультете экономики и управления, а утверждение $\beta$ — в том, что Вася изучает высшую математику. Тогда $\alpha \Rightarrow \beta$. Действительно, изучение высшей математики является необходимым условием для того, чтобы быть студентом факультета экономики и управления. С

[1]Перевернутая латинская буква «A», от англ. any — любой.

[2]Перевернутая латинская буква «E», от англ. exists — существует.



другой стороны, для изучения высшей математики достаточно быть студентом факультета экономики и управления.

Из справедливости $\alpha \Rightarrow \beta$, вообще говоря, не следует справедливость $\beta \Rightarrow \alpha$. В нашем случае Вася может изучать высшую математику и при этом не быть студентом факультета экономики и управления, а учиться, например, на биологическом или физико-техническом факультете.

Если $\alpha \Rightarrow \beta$ и одновременно $\beta \Rightarrow \alpha$, то пишут:

$$\alpha \Leftrightarrow \beta.$$

Такая теорема называется *критерием*. Формулируя критерий, обычно говорят, что условие $\alpha$ имеет место *тогда и только тогда*, когда выполнено $\beta$, или что условие $\alpha$ *необходимо и достаточно* для выполнения $\beta$.

### B.1.2. Общее понятие множества

*Множество* является одним из основных понятий математики. Оно принадлежит к числу первичных, не определяемых через другие математические понятия. Под множеством в математике понимают совокупность однородных элементов, объединенных по какому-либо признаку. Математические множества могут состоять из чисел, векторов, функций и других элементов. Множества, как правило, обозначают прописными буквами латинского алфавита, а их элементы — строчными. Принадлежность элемента $a$ множеству $A$ записывается следующим образом: $a \in A$. Если $a$ не является элементом множества $A$, то пишут $a \notin A$. Запись $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ означает, что множество $A$ состоит из элементов $a_1$, $a_2$, …, $a_n$.

Множество $X$ называется *подмножеством* множества $Y$, если все элементы множества $X$ являются одновременно элементами множества $Y$. При этом пишут $X \subset Y$ и говорят, что $X$ содержится в $Y$, или $Y$ содержит $X$. Два множества $X$ и $Y$ называются *равными*, если одновременно выполнены включения $X \subset Y$ и $Y \subset X$. В таком случае пишут $X = Y$. Равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Пусть, например, Вася обучается на первом курсе факультета экономики и управления. Обозначим Васю буквой $v$. Множество всех

студентов-первокурсников этого факультета обозначим $I$. Множество студентов всех курсов факультета экономики и управления обозначим $S$. Тогда

$$v \in I \subset S.$$

В самом деле, Вася принадлежит множеству студентов первого курса, которое в свою очередь содержится в более широком множестве всех студентов факультета.

Символом $\varnothing$ обозначают множество, которое не содержит ни одного элемента. Такое множество называется *пустым*. Пустое множество является подмножеством любого множества.

*Пересечением множеств* $X$ и $Y$ называется множество $Z = X \cap Y$, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих как $X$, так и $Y$. *Объединением множеств* $X$ и $Y$ называется множество $W = X \cup Y$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из указанных множеств.

### B.1.3. Числовые множества

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Основными числовыми множествами являются *множество натуральных чисел*

$$\mathbb{N} = \{\, 1, 2, \ldots, n, \ldots \},$$

*множество целых чисел*

$$\mathbb{Z} = \{\, 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots \},$$

состоящее из натуральных чисел, им противоположных, и нуля, *множество рациональных чисел*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

элементами которого являются всевозможные отношения целых чисел к натуральным. Всякое рациональное число может быть представлено в виде конечной либо бесконечной периодической десятичной дроби. Например,

$$\frac{1}{5} = 0{,}2, \quad \frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots = 0{,}1(6).$$



Множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ оказывается недостаточно для построения математической теории. Возникающие при этом проблемы можно, например, проиллюстрировать фактом, что не существует такого рационального числа, квадрат которого равнялся бы двум. В самом деле, если бы такое число существовало, то его можно было бы представить несократимой дробью $\frac{m}{n}$, где $m$ и $n$ — такие натуральные числа, что $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Отсюда следует, что $m^2 = 2n^2$. Тогда число $m^2$, а значит, и $m$, кратно двум. Следовательно, $m = 2r$, где $r$ — некоторое натуральное число, и, таким образом,

$$\left(\frac{2r}{n}\right)^2 = 2, \quad \frac{4r^2}{n^2} = 2, \quad 4r^2 = 2n^2, \quad n^2 = 2r^2.$$

А это означает, что и число $n$ также кратно двум, что противоречит несократимости дроби $\frac{m}{n}$.

Чтобы решить такого рода проблемы, множество рациональных чисел пополняется так называемыми *иррациональными числами*, представимыми в виде бесконечных непериодических десятичных дробей. Полученное множество, содержащее все рациональные и иррациональные числа, называют *множеством действительных чисел* и обозначают $\mathbb{R}$. Примерами иррациональных действительных чисел являются:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373\ldots, \quad \pi = 3{,}141592653589\ldots\ .$$

Между основными числовыми множествами имеет место следующее соотношение:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Пусть $a$ и $b$ — действительные числа, причем $a < b$. *Числовыми промежутками* (*интервалами*) называют подмножества всех действительных чисел, имеющие следующий вид:

$[a, b] = \{\, x : a \leqslant x \leqslant b \,\}$ — *отрезок* (замкнутый промежуток);

$(a, b) = \{\, x : a < x < b \,\}$ — *интервал* (открытый промежуток);

$[a, b) = \{\, x : a \leqslant x < b \,\}$, $(a, b] = \{x : a < x \leqslant b\}$ — *полуоткрытые интервалы*;

$(-\infty, b] = \{\, x : x \leqslant b \,\}$, $(-\infty, b) = \{\, x : x < b \,\}$ — не ограниченные снизу *полубесконечные интервалы*;

$[a,+\infty)=\{\,x : x \geqslant a\,\}$, $(a,+\infty)=\{x : x > a\}$ — не ограниченные сверху *полубесконечные интервалы*;

$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ — *бесконечный интервал*.

## B.2. Декартова система координат

### B.2.1. Декартовы координаты на прямой

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ обладает свойством *непрерывности*, суть которого состоит в возможности отождествления этого множества с прямой линией. Отметим, что для множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ свойство непрерывности не выполнено.

*Координатной осью* $Ox$ называется прямая, на которой отмечена точка $O$, называемая *началом отсчета* или *началом координат*, выбран масштаб, т.е. указан отрезок единичной длины для измерения расстояний, называемый *единичным* или *масштабным отрезком*, и задано *положительное направление*, отмечаемое стрелкой (рис. B.1). Начало координат $O$ в соответствии с выбранным направлением делит ось $Ox$ на два луча: *положительную* и *отрицательную полуоси*.

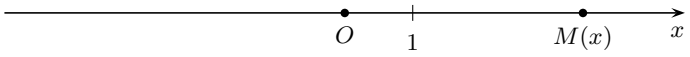


**Рис. B.1**

*Координатой точки* $M$, лежащей на оси $Ox$, называется число $x$, равное длине отрезка $OM$, взятой со знаком «+», если точка $M$ лежит на положительной полуоси, и со знаком «−», если эта точка лежит на отрицательной полуоси. Координату точки обычно указывают в скобках рядом с обозначением точки. Если, например, точка $M$ имеет координату $x$, то пишут $M(x)$. Таким образом, каждой точке координатной оси поставлено в соответствие некоторое число $x \in \mathbb{R}$.

С другой стороны, каждому действительному числу $x$ можно поставить в соответствие точку $M$ оси $Ox$, имеющую координату $x$. Для этого на оси $Ox$ следует отложить отрезок $OM = |x|$ в положительном направлении, если $x \geqslant 0$, и в отрицательном направлении, если $x < 0$.

Итак, мы ввели *декартовы координаты* на прямой, установив взаимно однозначное соответствие между множеством точек числовой оси и множеством действительных чисел $\mathbb{R}$.



Расстояние между двумя точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ на оси $Ox$ выражается формулой

$$M_1M_2 = |x_1 - x_2| \tag{B.1}$$

(убедитесь в этом самостоятельно) и, таким образом, равно модулю разности соответствующих координат.

### B.2.2. Декартовы координаты на плоскости

Переходя к случаю плоскости, проведем пару взаимно перпендикулярных координатных осей с одинаковым масштабным отрезком так, чтобы их начала координат совпали. Первую ось назовем *осью абсцисс* и будем обозначать $Ox$, вторую назовем *осью ординат* и будем обозначать $Oy$. Оси координат делят плоскость на четыре части, называемые *квадрантами* (рис. B.2).

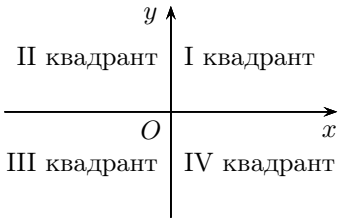


**Рис. B.2**

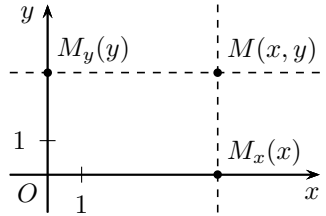


**Рис. B.3**

Рассмотрим произвольную точку $M$ плоскости. Через эту точку проведем прямую, параллельную оси ординат (рис. B.3). Она пересечет ось абсцисс $Ox$ в некоторой точке $M_x$. Координата $x$ точки $M_x$ на оси $Ox$ называется *абсциссой* точки $M$. Теперь проведем через точку $M$ прямую, параллельную оси абсцисс. Она пересечет ось ординат $Oy$ в некоторой точке $M_y$. Координату $y$ точки $M_y$ на оси $Oy$ назовем *ординатой* точки $M$. Таким образом, каждой точке плоскости $M$ мы поставили в соответствие пару действительных чисел $x$ и $y$. Это соответствие принято обозначать $M(x,y)$.

Произвольной паре чисел $x, y \in \mathbb{R}$, в свою очередь, может быть поставлена в соответствие некоторая точка плоскости. Чтобы убедиться в этом, отметим на осях $Ox$ и $Oy$ точки $M_x(x)$ и $M_y(y)$. Напомним, что мы уже научились это делать, когда рассматривали

координаты на прямой. Проведем через точки $M_x$ и $M_y$ прямые, параллельные соответственно осям $Oy$ и $Ox$. Точка пересечения этих прямых и будет искомой точкой $M(x, y)$.

Из сказанного можно сделать вывод, что, введя декартовы координаты на плоскости, мы отождествили упорядоченные пары действительных чисел, множество которых принято обозначать $\mathbb{R}^2$, и точки плоскости.

### B.2.3. Декартовы координаты в пространстве

Для построения декартовой системы координат в пространстве начертим три взаимно перпендикулярные координатные оси с общим началом координат $O$ и одинаковым масштабным отрезком (рис. B.4). Будем называть их *осями абсцисс*, *ординат* и *аппликат* и обозначать $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно.

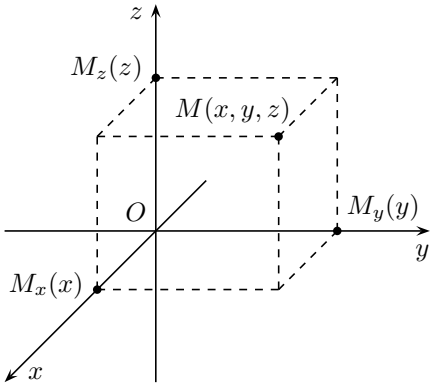


**Рис. B.4**

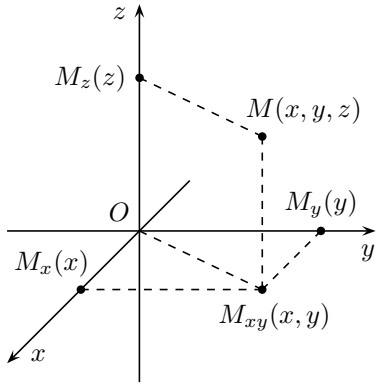


**Рис. B.5**

В зависимости от взаимного расположения осей декартова система координат в пространстве может быть *правой* или *левой*. Правую систему координат можно получить, если ось абсцисс пустить по направлению большого пальца правой руки, ось ординат — указательного, а ось аппликат — среднего. Чаще всего рассматривают именно правую систему координат (рис. B.4). Левую систему координат можно получить, если в правой системе поменять направление любой из осей на противоположное.



Попарно взятые координатные оси образуют *координатные плоскости* $xOy$, $yOz$ и $xOz$, разбивающие пространство на восемь частей — *октантов*. Например, точка $M$ на рис. B.4 лежит в первом октанте.

Рассмотрим произвольную точку $M$ пространства и проведем через нее плоскости, параллельные координатным плоскостям $yOz$, $xOz$ и $xOy$. Точки пересечения этих плоскостей с осями $Ox$, $Oy$ и $Oz$ обозначим соответственно $M_x$, $M_y$ и $M_z$ (рис. B.4). Координаты $x$, $y$ и $z$ точек $M_x$, $M_y$ и $M_z$ на осях $Ox$, $Oy$ и $Oz$ назовем соответственно *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой* точки $M$ или *декартовыми прямоугольными координатами* этой точки. То, что точка $M$ имеет координаты $x$, $y$ и $z$, будем обозначать следующим образом: $M(x, y, z)$.

Чтобы построить точку $M(x, y, z)$, зная ее координаты, отметим на осях $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно точки $M_x(x)$, $M_y(y)$ и $M_z(z)$, действуя так же, как и в одномерном случае (рис. B.5). Как и в двухмерном случае, на координатной плоскости $xOy$ найдем точку $M_{xy}(x, y)$. Проведем прямую через точки $O$ и $M_{xy}$. Через точку $M_z$ проведем прямую, параллельную ей, а через точку $M_{xy}$ — прямую, параллельную оси $Oz$. На пересечении последних двух прямых лежит искомая точка $M(x, y, z)$.

Итак, мы поставили в соответствие произвольной тройке действительных чисел точку пространства и заодно ознакомились с удобным способом графического построения точки по ее координатам.

Декартовы координаты в пространстве позволяют установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками действительных чисел, множество которых обозначают $\mathbb{R}^3$.

## B.3. Метод математической индукции

### B.3.1. Дедукция и индукция в математике

Одной из отличительных черт математики является дедуктивное построение теории, при котором все утверждения выводятся из нескольких основных положений, называемых *аксиомами*, с помощью *дедукции*, т.е. с помощью логического вывода. Однако дедукция является не единственным методом научного мышления. В науке широко используются также *индуктивные* рассуждения и выводы, сделанные

на основе наблюдения и опытов, т.е. полученные путем заключений от частного к общему.

Так, одной из форм математического рассуждения является *метод математической индукции*, который может применяться в случае, когда требуется установить справедливость бесконечной последовательности утверждений

$$T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_{n-1},\ T_n,\ \ldots,$$

занумерованных натуральными числами.

Рассуждение по методу математической индукции состоит из следующих двух этапов:

1) *база индукции*, когда проверяется истинность утверждения $T_1$, т.е. первого из утверждений в последовательности;
2) *индукционный переход*, где для всякого $n \in \mathbb{N}$ доказывается, что если верно утверждение $T_n$, называемое *предположением индукции*, то верно и следующее за ним утверждение $T_{n+1}$.

### B.3.2. Суммы и прогрессии

Понятие математической индукции естественным образом возникает при изучении *прогрессий*. Прогрессии определяются *рекуррентными соотношениями*, т.е. соотношениями, позволяющими выразить следующий член по одному или нескольким предыдущим членам. *Арифметическая* и *геометрическая прогрессии* задаются соответственно рекуррентными соотношениями:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad b_{n+1} = b_n q,$$

где число $d$ называется *разностью*, а $q$ — *знаменателем* соответствующей прогрессии.

Таким образом, само определение этих прогрессий дается с помощью индукции от $n$ к $n+1$. Поэтому и большинство формул, относящихся к прогрессиям, целесообразно выводить с использованием метода математической индукции. Это касается в первую очередь формул для сумм первых $n$ членов арифметической и геометрической прогрессий. Для арифметической прогрессии имеем:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1+a_n}{2}\, n = a_1 n + d\,\frac{n(n-1)}{2}. \quad \text{(B.2)}$$



Для геометрической прогрессии верно, что

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \begin{cases} b_1\dfrac{q^n-1}{q-1} & \text{при } q \neq 1, \\ n b_1 & \text{при } q = 1. \end{cases} \quad \text{(B.3)}$$

При записи формул (B.2) и (B.3) мы воспользовались символом суммирования $\sum$, который читается «сумма». Вообще говоря,

$$\sum_{k=m}^{n} f_k = f_m + f_{m+1} + f_{m+2} + \ldots + f_n, \qquad m, n \in \mathbb{N},\ f_k \in \mathbb{R}.$$

Символ $k$ называют *индексом суммирования*. Он пробегает значения от *нижней границы суммирования* $m$ до *верхней границы суммирования* $n$. Если $n < m$, то в сумме нет ни одного слагаемого и ее значение принимают равным нулю. Не меняя суммы, можно обозначить индекс суммирования любой буквой. Сумма также не изменится, если к границам суммирования добавить любое целое число $r$ и вычесть это число из индекса суммирования в выражении под знаком суммы:

$$\sum_{k=m}^{n} f_k = \sum_{l=m}^{n} f_l = \sum_{k=m+r}^{n+r} f_{k-r} = f_m + f_{m+1} + \ldots + f_n.$$

Докажем, например формулу (B.3) для суммы геометрической прогрессии. Случай $q = 1$ тривиальный. Будем считать, что $q \neq 1$. При $n = 1$ имеем:

$$S_1 = b_1 = b_1\frac{q^1-1}{q-1}.$$

Итак, база индукции установлена.

Осуществим индукционный переход. Предположим, что формула (B.3) верна для некоторого номера $n \in \mathbb{N}$. Докажем справедливость этой формулы и для номера $n+1$. В самом деле,

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}.$$

По предположению индукции к стоящей здесь сумме применима формула (B.3). Кроме того, очевидно, что $b_{n+1} = b_1 q^n$. Тогда

$$S_{n+1} = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + b_1 q^n = b_1 \left( \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{q^n (q - 1)}{q - 1} \right) = \\ = b_1 \frac{(q^n - 1) + (q^{n+1} - q^n)}{q - 1} = b_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

что и требовалось доказать.

### B.3.3. Произведения и факториалы

По аналогии со знаком суммы вводится знак произведения:

$$\prod_{k=m}^{n} p_k = p_m \cdot p_{m+1} \cdot p_{m+2} \cdot \ldots \cdot p_n, \qquad m, n \in \mathbb{N},\ p_k \in \mathbb{R}.$$

Если $n < m$, т.е. произведение не содержит множителей, то его значение считают равным единице.

В математике часто встречаются произведения первых $n$ натуральных чисел, называемые *факториалами* и обозначаемые $n!$ (читается «эн факториал»). Иначе говоря,

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пользуясь очевидным соотношением $(n+1)! = n!\,(n+1)$, несложно вычислять факториалы для небольших значений $n$:

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \ \ldots\ .$$

Метод математической индукции часто применяют для доказательства неравенств. Мы, например, установим, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 2 - \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{B.4}$$

Очевидно, что при $n = 1$ в формуле (B.4) имеет место знак равенства.



Осуществим индукционный переход. Считаем, что формула (B.4) верна для некоторого номера $n \in \mathbb{N}$. Доказываем ее справедливость для номера $n + 1$. В самом деле,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}.$$

К стоящей справа сумме применим предположение индукции. Отметим также, что $(n+1)! \geqslant n(n+1)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \leqslant \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n(n+1)} = 2 - \frac{n+1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \\ = 2 - \frac{(n+1) - 1}{n(n+1)} = 2 - \frac{n}{n(n+1)} = 2 - \frac{1}{n+1},$$

что и требовалось доказать.

### B.3.4. Бином Ньютона

Историки науки утверждают, что, несмотря на свое название, знаменитая формула бинома Ньютона была открыта задолго до второй половины XVII в., когда ею заинтересовался сэр Исаак Ньютон. Оказывается, ее уже знали китайские и арабские математики XIII в. Эта формула имеет следующий вид:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{B.5}$$

Числа $C_n^k$ называются *биномиальными коэффициентами* и вычисляются по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n. \tag{B.6}$$

Выпишем бином Ньютона в развернутой форме:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

И. Ньютон обобщил формулу (B.5) на случай произвольного рационального показателя $n$.

Для всякого $n \in \mathbb{N}$ находим:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1, \quad C_n^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n.$$

В силу определения (B.6) $C_n^{n-k} = C_n^k$, поэтому $C_n^n = 1$ и $C_n^{n-1} = n$.

Для биномиальных коэффициентов имеет место формула

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{B.7}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,\big(n-(k-1)\big)!} = \\ &= \frac{n!\,(n+1-k)}{k!\,(n+1-k)!} + \frac{n!\,k}{k!\,(n+1-k)!} = \\ &= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,\big((n+1)-k\big)!} = C_{n+1}^k. \end{aligned}$$

Формула (B.7) позволяет быстро вычислять биномиальные коэффициенты порядка $n+1$, если известны коэффициенты порядка $n$. При этом для наглядности их удобно выписывать в виде так называемого *треугольника Паскаля*:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | | | | | | 1 | | | | | |
| $n=1$ | | | | | 1 | | 1 | | | | |
| $n=2$ | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | |
| $n=3$ | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | |
| $n=4$ | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | |
| $n=5$ | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 |

Здесь каждый элемент равен сумме двух соседних с ним элементов из предыдущей строки. В качестве упражнения самостоятельно заполните еще две строки для $n = 6$ и $n = 7$.

Для доказательства справедливости формулы бинома Ньютона (B.5) применим метод математической индукции. При $n = 1$

$$(a+b)^1 = a + b = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^{1-k} b^k.$$



Выполним индукционный переход. Предположим, что формула бинома Ньютона верна для некоторого номера $n$. Докажем, что тогда она верна и для номера $n+1$. В самом деле,

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \\ &= a\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k + b\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = S_1 + S_2, \end{aligned}$$

где для краткости первое слагаемое правой части обозначено через $S_1$, а второе — через $S_2$. Из суммы $S_1$ извлечем слагаемое, соответствующее $k = 0$:

$$S_1 = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k.$$

Из суммы $S_2$ извлечем слагаемое, соответствующее $k = n$, а в оставшейся сумме добавим единицу к границам суммирования:

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^{n-(k-1)} b^k + b^{n+1},$$

откуда

$$(a+b)^{n+1} = S_1 + S_2 = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}.$$

Воспользуемся формулой (B.7). Тогда

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k,$$

что и требовалось доказать.

# Глава 1

# Линейная алгебра

## 1.1. Матрицы и определители

### 1.1.1. Понятие матрицы. Виды матриц

**Определение 1.1.** Прямоугольная таблица чисел, содержащая $m$ строк и $n$ столбцов, называется *матрицей размера* $m \times n$. Матрицы, как правило, обозначают прописными буквами латинского алфавита и записывают в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или коротко $A = (a_{ij})$.

**Определение 1.2.** Строки и столбцы матриц объединяют общим названием *ряды*.

**Определение 1.3.** Числа $a_{ij}$, образующие матрицу $A = (a_{ij})$, называются ее *элементами*, причем индекс $i$ обозначает *номер строки*, а $j$ — *номер столбца*, где расположен данный элемент.

**Определение 1.4.** Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковых размеров называются *равными*, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$.



**Определение 1.5.** Матрица $O$ называется *нулевой* или *нуль-матрицей*, если все ее элементы равны нулю.

**Определение 1.6.** Матрица, число строк которой равно числу столбцов и равно $n$, называется *квадратной матрицей порядка* $n$.

**Определение 1.7.** Элементы $a_{11}$, $a_{22}$, $\dots$, $a_{nn}$ квадратной матрицы порядка $n$ образуют ее *главную диагональ*. Другая диагональ, состоящая из элементов $a_{n1}$, $a_{n-1,2}$, $\dots$, $a_{1n}$, называется *побочной*.

**Определение 1.8.** Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю.

**Определение 1.9.** Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

**Определение 1.10.** Диагональная матрица называется *единичной* и обозначается $E$, если все ее элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице.

Пример 1.1. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются соответственно квадратной, треугольной, диагональной и единичной матрицами третьего порядка.

*Замечание* 1.1. В матричном исчислении нулевая матрица $O$ и единичная матрица $E$ играют роль, аналогичную роли чисел 0 и 1 в арифметике.

**Определение 1.11.** Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором-столбцом* или *вектором-строкой*.

Пример 1.2. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются соответственно вектором-столбцом и вектором-строкой.

Можно рассматривать матрицы размера $1 \times 1$ и вида $A = (a_{11})$, например $A = (3)$, т.е. просто числа.

**Определение 1.12.** *Ступенчатой* называется матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,r-1} & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

где элементы $a_{11}$, $a_{22}$, $\dots$, $a_{rr}$ отличны от нуля. Ступенчатыми считаются также матрицы, приводимые к виду (1.1) перестановкой параллельных рядов.

Пример 1.3. Матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

являются ступенчатыми.

### 1.1.2. Операции над матрицами

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд действий, причем некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые — специфические.

**Определение 1.13.** *Суммой двух матриц* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ *одинаковых размеров* называется матрица того же размера $A + B = C_{m\times n} = (c_{ij})$, элементы которой равны сумме элементов матриц $A$ и $B$, расположенных на соответствующих местах:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \ j = 1, 2, \dots, n.$$

Пример 1.4. Для заданных матриц $A$ и $B$ находим сумму $A+B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A + B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$



**Определение 1.14.** *Произведением матрицы* $A = (a_{ij})$ *на число* $k$ называется матрица $kA = (ka_{ij})$ того же размера, что и матрица $A$, полученная умножением всех элементов матрицы $A$ на число $k$.

Пример 1.5. Для заданной матрицы $A$ находим матрицу $3A$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad 3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

**Определение 1.15.** Матрицу $-A = (-1) \cdot A$ будем называть *противоположной* матрице $A$.

**Определение 1.16.** *Разностью матриц* $A$ *и* $B$ *одинаковых размеров* называется сумма матрицы $A$ и матрицы, противоположной к $B$, т.е. $A - B = A + (-B)$.

Несложно доказать, что операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) $A + O = A$;
4) $A - A = O$;
5) $1 \cdot A = A$;
6) $k(A + B) = kA + kB$;
7) $(k + l)A = kA + lA$;
8) $k(lA) = (kl)A$.

Рассмотренные действия над матрицами аналогичны соответствующим действиям над числами. Этого нельзя сказать про вводимое ниже произведение матриц, которое возможно только для так называемых согласованных матриц.

**Определение 1.17.** Две матрицы называются *согласованными*, если число столбцов первой равно числу строк второй.

**Определение 1.18.** *Произведением* $AB$ *согласованных матриц* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ik})$, элемент $c_{ik}$ которой вычисляется как сумма произведений элементов $i$-й строки матрицы $A$ на соответствующие элементы $k$-го столбца матрицы $B$:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk}.$$

Вычисление элемента $c_{ik}$ проиллюстрировано на рис. 1.1.

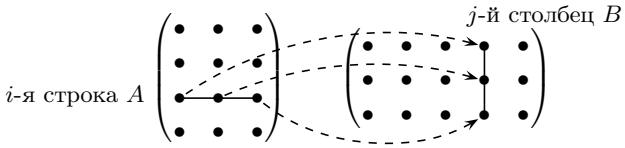


**Рис. 1.1**

*Замечание* 1.2. Из возможности умножения матрицы $A$ на матрицу $B$ не следует существования произведения $BA$. Дело в том, что согласованность матриц $A$ и $B$, вообще говоря, не обеспечивает согласованности матриц $B$ и $A$ (рис. 1.1).

Пример 1.6. Вычислить произведение матриц $A$ и $B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. По определению произведения матриц

$$AB = \begin{pmatrix} 1(-1)+0\cdot 5+2(-2) & 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0 \\ 3(-1)+1\cdot 5+0(-2) & 3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1) $A(B+C) = AB + AC$;
2) $(A+B)C = AC + BC$;
3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;
4) $A(BC) = (AB)C$.

*Замечание* 1.3. Для квадратных матриц $A$ и $B$ одинаковых размеров заданы оба произведения: $AB$ и $BA$. При этом, вообще говоря, $AB \neq BA$, т.е. произведение матриц не обладает свойством *перестановочности*.

Пример 1.7. Найти произведения $AB$ и $BA$ матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$



Р е ш е н и е. Имеем:

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+2\cdot 6 & 1\cdot 5+2\cdot 8 \\ 3\cdot 0+4\cdot 6 & 3\cdot 5+4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 47 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+5\cdot 3 & 0\cdot 2+5\cdot 4 \\ 6\cdot 1+8\cdot 3 & 6\cdot 2+8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix}.$$

Итак, в данном случае $AB \neq BA$. $\square$

*Замечание* 1.4. Из того, что произведение двух матриц равно нулевой матрице, не следует, что хотя бы одна из матриц нулевая. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

**Определение 1.19.** Матрицы $A$ и $B$, для которых $AB = BA$, называются *перестановочными*.

Очевидно, что любая квадратная матрица $A$ является перестановочной с единичной матрицей $E$ и нулевой матрицей $O$, причем

$$AE = EA = A, \quad AO = OA = O.$$

**Определение 1.20.** Если $k \in \mathbb{N}$, то *$k$-й степенью квадратной матрицы* $A$ называется произведение $k$ матриц $A$:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ раз}}.$$

По определению считают, что $A^0 = E$.

Операция возведения в степень обладает следующими привычными свойствами:

1) $A^m A^k = A^{m+k}$,
2) $(A^m)^k = A^{mk}$.

**Определение 1.21.** *Многочленом степени $n$* от квадратной матрицы $A$ называется выражение вида

$$P_n(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A^1 + a_0 A^0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — произвольные числа.

Пример 1.8. Найти значение $f(A)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3.$$

Р е ш е н и е. Вычисляем $A^2$ и $A^3$:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим $f(A)$:

$$f(A) = 2A^3 - 4A^2 + 3E = \\ = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**Определение 1.22.** Матрица $A^T$, столбцы которой составлены из строк матрицы $A$ с теми же номерами и тем же порядком следования элементов, называется *транспонированной* к матрице $A$.

Пример 1.9. Найти матрицу, транспонированную к данной матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перечислим основные свойства операции транспонирования:

1) $\left(A^T\right)^T = A$;
2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
3) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
4) $(AB)^T = B^T A^T$.

### 1.1.3. Определители низших порядков

Квадратной матрице $A$ может быть поставлено в соответствие число, называемое *определителем* и обозначаемое $|A|$, $\det A$ или $\Delta$.



**Определение 1.23.** *Определитель первого порядка* квадратной матрицы $A = (a_{11})$ равен самому элементу этой матрицы, а именно $\det A = |A| = a_{11}$.

*Замечание* 1.5. Следует различать вертикальные линии, обозначающие определитель и модуль числа: они имеют совершенно различный смысл. Определитель, например, может принимать отрицательные значения.

**Определение 1.24.** *Определителем второго порядка* квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{1.2}$$

*Замечание* 1.6. Правило вычисления определителя второго порядка иллюстрируется рис. 1.2 и состоит в том, что из произведения элементов главной диагонали вычитается произведение элементов побочной диагонали.

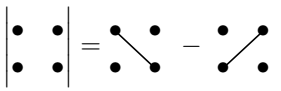

**Рис. 1.2**

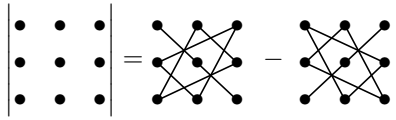

**Рис. 1.3**

Пример 1.10. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. По «правилу диагоналей»

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2)(-7) = 15 - 14 = 1. \qquad \square$$

**Определение 1.25.** *Определителем третьего порядка* квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \tag{1.3}$$

*Замечание* 1.7. Облегчить запоминание формулы (1.3) позволяет так называемое *правило треугольников*, представленное схемой на рис. 1.3. Суть правила треугольников состоит в том, что со знаком «+» берется произведение элементов главной диагонали, а также произведения элементов, стоящих в вершинах треугольников, чьи основания параллельны главной диагонали. Со знаком «−» идет побочная диагональ и соответствующие ей треугольники.

Пример 1.11. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. По правилу треугольников

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = \\ = 2 + 2 - 1 - 1 + 4 - 1 = 5. \quad \square$$

### 1.1.4. Определители произвольного порядка

Определитель квадратной матрицы произвольного порядка $n$ выражается через специальные определители порядка $n-1$, называемые минорами. Такой подход позволяет при вычислении определителя последовательно понижать его порядок до тех пор, пока не будут получены определители третьего или второго порядка, которые могут быть вычислены непосредственно.

**Определение 1.26.** *Минором $M_{ij}$ элемента $a_{ij}$* квадратной матрицы $A$ порядка $n$ называется определитель квадратной матрицы $(n-1)$-го порядка, получаемой вычеркиванием в матрице $A$ $i$-й строки и $j$-го столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

**Определение 1.27.** *Алгебраическим дополнением $A_{ij}$ элемента $a_{ij}$* квадратной матрицы $A$ называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$



Пример 1.12. Минор $M_{23}$ и алгебраическое дополнение $A_{23}$ для квадратной матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

вычисляются по формулам:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

**Определение 1.28.** *Определителем квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка $n$* называется сумма произведений элементов первой строки матрицы $A$ на их алгебраические дополнения:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}. \qquad (1.4)$$

*Замечание* 1.8. Определение 1.28 согласуется с определениями, введенными ранее, в том смысле, что, как несложно проверить, применительно к определителям второго и третьего порядка формула (1.4) дает такой же результат, как и рассмотренные ранее формулы (1.2) и (1.3).

Пример 1.13. Вычислить определитель из примера 1.3 с помощью формулы (1.4).

Р е ш е н и е. Имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ = 1(2-1) + 1(4-1) + 1(2-1) = 1 + 3 + 1 = 5.$$

Как мы и предполагали, результат оказался тем же. $\square$

*Замечание* 1.9. Вводя понятие определителя произвольного порядка по формуле (1.4), мы могли создать у читателя впечатление, что первая строка определителя играет особую, исключительную роль. Приводимая ниже теорема Лапласа утверждает, что это не так и все строки и столбцы определителя равнозначны. Нам пришлось выбрать один конкретный ряд, чтобы избежать двусмысленной формулировки и придать ей как можно более простой вид.

**Теорема 1.1 (Лапласа).** *Определитель равен сумме произведений элементов любого ряда на их алгебраические дополнения.*

Итак, для вычисления определителя его можно раскладывать по элементам не только первой строки, но и любой другой строки или столбца. Результат всегда будет одинаковым.

Пример 1.14. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определитель из примера 1.11, раскладывая его по третьему столбцу.

Р е ш е н и е. Согласно теореме Лапласа

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & \boxed{2} \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(2-1) - 1(1+1) + 2(1+2) = 1 - 2 + 6 = 5.$$

Результат, естественно, оказался в точности таким же, как в примерах 1.11 и 1.13. □

Теорема Лапласа может быть использована для вычисления определителей четвертого и более высоких порядков.

Пример 1.15. Вычислить $\det A$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.



Р е ш е н и е. Один из элементов первой строки матрицы $A$ равен нулю, что освобождает нас от нахождения соответствующего минора. Для сокращения вычислений знаки алгебраических дополнений будем находить в уме:

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{5} & \boxed{-7} \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\Big(6\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot(-2)\cdot 2 + 2\cdot(-3)\cdot 1 - \\ - 2\cdot 1\cdot 1 - (-3)\cdot 4\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot 6\Big) +$$

$$+ 5\Big(2\cdot(-3)\cdot 1 + 6\cdot(-2)\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 - \\ - 2\cdot(-3)\cdot 1 - 1\cdot 6\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot 2\Big) +$$

$$+ 7\Big(2\cdot(-3)\cdot 2 + 6\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 4 - \\ - 2\cdot(-3)\cdot 4 - 1\cdot 6\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 2\Big) =$$

$$= 1(6 - 16 - 6 - 2 + 12 + 24) + 5(-6 - 24 + 2 + 6 - 6 + 8) + \\ + 7(-12 + 12 + 8 + 24 - 12 - 4) =$$

$$= 1\cdot 18 + 5(-20) + 7\cdot 16 = 18 - 100 + 112 = 30.$$ □

### 1.1.5. Свойства определителей

**1.** *При транспонировании матрицы ее определитель не меняется, т.е.* $|A^T| = |A|$.

**2.** *При перестановке двух параллельных рядов знак определителя меняется на противоположный.*

**3.** *Общий множитель всех элементов любого ряда определителя можно вынести за знак определителя.*

Пример 1.16. Вынесем множитель $k$ из второй строки определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**4.** *Определитель, содержащий нулевой ряд, равен нулю.*

**5.** *Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

**6.** *Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то этот определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.*

Пример 1.17. Применим рассмотренное свойство к первой строке следующего определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & a_{13}+b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**7.** *Определитель, два параллельных ряда которого одинаковы или пропорциональны, равен нулю.*

**8.** *Определитель не изменяется, если к элементам одного из его рядов прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.*

Пример 1.18. В определителе третьего порядка прибавим ко второму столбцу первый, умноженный на некоторое число $k$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**9.** *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей*:

$$|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|.$$



**10 (теорема аннулирования).** *Сумма произведений элементов любого ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого ряда равна нулю.*

### 1.1.6. Элементарные преобразования

Как мы уже могли заметить, решая пример 1.15, нахождение определителя четвертого и бóльших порядков требует значительных вычислительных затрат. Рассмотрим способ повышения вычислительной эффективности этой процедуры.

**Определение 1.29.** Будем называть *элементарными преобразованиями матриц*

1) перестановку местами двух параллельных рядов;
2) умножение всех элементов ряда матрицы на число $k$, отличное от нуля;
3) добавление ко всем элементам любого ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

**Определение 1.30.** Две матрицы $A$ и $B$ называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. При этом пишут $A \sim B$.

Применяя свойства определителей, посмотрим, как влияют элементарные преобразования квадратной матрицы на значение ее определителя. Первое из преобразований определения 1.29 по свойству 2 изменяет знак определителя, второе — по свойству 3 приводит к умножению значения определителя на число $k$, третье — по свойству 8 не влияет на значение определителя.

Подвергая квадратную матрицу порядка $n$ элементарным преобразованиям, можно добиться того, чтобы в каком-либо из ее рядов все элементы, кроме одного, обратились в нуль. Тогда, разложив определитель преобразованной матрицы по элементам такого ряда, мы сведем вычисление определителя порядка $n$ к вычислению одного (а не $n$) определителя порядка $n-1$.

Пример 1.19. Применяя элементарные преобразования, вычислить определитель из примера 1.15.

Р е ш е н и е. Применяя элементарное преобразование 3, преобразуем данный определитель так, чтобы все элементы его первой строки, кроме элемента 1, который мы будем называть *разрешающим*, стали равны нулю. Для этого будем брать первый столбец и, домножая его на $-5$ и 7, добавлять к третьему и четвертому столбцам соответственно. Выбор элемента 1 в качестве разрешающего обусловлен тем, что на него без остатка делятся остальные элементы первой строки. Данный прием позволяет избежать дробей в вычислениях:

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{5} & \boxed{-7} \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -6 & 15 \\ 1 & -3 & -4 & 5 \\ 2 & 2 & -8 & 15 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & -6 & 15 \\ -3 & -4 & 5 \\ 2 & -8 & 15 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка вычислим аналогичным способом. Начнем с того, что вынесем за знак определителя множитель 3 из первой строки, а также множители 2 и 5 из второго и третьего столбцов:

$$|A| = 3 \cdot 2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & \boxed{1} \\ -3 & -2 & \boxed{1} \\ 2 & -4 & \boxed{3} \end{vmatrix} = 30 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & \boxed{1} \\ 11 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 30 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -30(5 \cdot 2 - 11 \cdot 1) = -30(-1) = 30.$$

Как и следовало ожидать, результат оказался таким же, как в примере 1.15, причем выкладки существенно сократились. □

### 1.1.7. Обратная матрица

**Определение 1.31.** Пусть $A$ — квадратная матрица. Матрица $A^{-1}$ называется *обратной* для $A$, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$



где $E$ — единичная матрица.

**Теорема 1.2.** *Если для квадратной матрицы $A$ существует обратная, то она единственная.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для матрицы $A$ существуют две обратные матрицы: $A_1^{-1}$ и $A_2^{-1}$. Тогда по определению обратной матрицы

$$A_1^{-1} = A_1^{-1}E = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = EA_2^{-1} = A_2^{-1}.$$

Итак, все обратные матрицы совпадают, т.е. обратная матрица единственна. □

**Определение 1.32.** Квадратная матрица $A$ называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю: $\det A \neq 0$. В противном случае, когда $\det A = 0$, матрица называется *вырожденной*.

**Определение 1.33.** Матрица $A^*$, транспонированная к матрице, составленной из алгебраических дополнений квадратной матрицы $A$, называется *присоединенной к матрице $A$*.

Пример 1.20. Выпишем квадратную матрицу третьего порядка $A$ и ее присоединенную $A^*$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

**Теорема 1.3.** *Для квадратной матрицы $A$ существует обратная тогда и только тогда, когда матрица $A$ невырожденная. При этом*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, \tag{1.6}$$

*где $A^*$ — присоединенная матрица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Предположим, что для матрицы $A$ существует обратная матрица $A^{-1}$. Тогда $AA^{-1} = E$, и по свойствам 9 и 5 определителей

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1.$$

Итак, произведение чисел $|A|$ и $|A^{-1}|$ не равно нулю. Значит, каждое из этих чисел не равно нулю и, таким образом, матрица $A$ невырожденная. Заметим также, что $|A^{-1}| = 1/|A|$.

*Достаточность.* Ограничимся случаем квадратной невырожденной матрицы $A$ третьего порядка. Пользуясь представлением (1.5), найдем произведение матрицы $A$ на ее присоединенную $A^*$:

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{pmatrix}.$$

К элементам, стоящим на главной диагонали полученной матрицы, применим теорему Лапласа, а ко всем остальным — теорему аннулирования. Тогда имеем:

$$AA^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A|E.$$

Аналогично доказывается, что и $A^*A = |A|E$. Итак,

$$A\frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{|A|}(AA^*) = \frac{1}{|A|}(|A|E) = E, \quad \frac{A^*}{|A|}A = \frac{1}{|A|}(A^*A) = E.$$

Отсюда в силу определения обратной матрицы следует ее существование и справедливость представления (1.6). □

Невырожденные матрицы обладают следующими свойствами:

1) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$;
2) $(A^{-1})^{-1} = A$;
3) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$;
4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
5) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Теорема 1.3 позволяет сформулировать приведенный ниже *алгоритм нахождения обратной матрицы* для квадратной матрицы $A$.



1. Вычисляем определитель $|A|$. Если $|A| = 0$, то матрица $A$ вырожденная и обратная $A^{-1}$ не существует. Если $|A| \neq 0$, т.е. матрица $A$ невырожденная, то продолжаем вычисления.
2. Находим алгебраические дополнения для всех элементов матрицы $A$.
3. Строим присоединенную матрицу $A^*$.
4. Выписываем обратную матрицу $A^{-1}$ по формуле (1.6).

Пример 1.21. Найти матрицу, обратную к $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. 1. Данная матрица уже рассматривалась в примере 1.3. Там мы нашли, что $|A| = 5 \neq 0$. Значит, матрица $A$ невырожденная и существует обратная.

2. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы $A$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-1) = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(4-1) = -3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-1) = 1.$$

Аналогично получаем:

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

3. Выписываем присоединенную матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. По формуле (1.6) выписываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку. По определению обратной матрицы, перемножив матрицы $A$ и $A^{-1}$, мы должны получить единичную матрицу $E$. Убедимся, что так оно и есть:

$$AA^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1+3+1 & 3+(-1)+(-2) & (-2)+(-1)+3 \\ 2+(-3)+1 & 6+1+(-2) & (-4)+1+3 \\ 1+(-3)+2 & 3+1+(-4) & (-2)+1+6 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \quad \square$$

*Замечание* 1.10. Для квадратной матрицы второго порядка присоединенная матрица находится по следующему простому правилу: элементы главной диагонали меняются местами, а элементы побочной диагонали умножаются на $-1$. Это позволяет для любой невырожденной квадратной матрицы $A$ второго порядка быстро находить обратную матрицу $A^{-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \qquad (1.7)$$

### 1.1.8. Матричные уравнения

**Определение 1.34.** Уравнение, где неизвестной является матрица, называется *матричным уравнением*.

Матричные уравнения можно решать с помощью обратной матрицы. Различают следующие виды матричных уравнений:

$$AX = B, \quad XA = B, \quad AXC = B. \qquad (1.8)$$



Здесь $X$ — неизвестная матрица. Все матрицы в левой части уравнения должны быть согласованными. С обеих сторон от знака «=» должны быть матрицы одинаковых размеров.

**Теорема 1.4.** *Если матрицы $A$ и $C$ квадратные и невырожденные, то матричные уравнения* (1.8) *имеют единственные решения, которые могут быть найдены по формулам:*

$$X = A^{-1}B, \quad X = BA^{-1}, \quad X = A^{-1}BC^{-1}.$$

Доказательство. Домножая левую и правую части первого из уравнений слева на матрицу $A^{-1}$, получаем:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \;\; (A^{-1}A)X = A^{-1}B, \;\; EX = A^{-1}B, \;\; X = A^{-1}B.$$

Домножая второе уравнение справа на матрицу $A^{-1}$, аналогично находим, что $X = BA^{-1}$.

Третье уравнение домножим слева на $A^{-1}$ и справа на $C^{-1}$:

$$A^{-1}AXCC^{-1} = A^{-1}BC^{-1}, \; EXE = A^{-1}BC^{-1}, \; X = A^{-1}BC^{-1}. \quad \square$$

Пример 1.22. Решить матричное уравнение

$$X\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем данное уравнение в следующем виде:

$$XA = B, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти $A^{-1}$, воспользуемся представлением (1.7) обратной матрицы второго порядка:

$$A^{-1} = \frac{1}{5\cdot 1 - 0(-3)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда по теореме 1.4

$$X = BA^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -15 & -10 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$XA = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+6 & 0-2 \\ 15-3 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} = B$$

убеждает нас в верности полученного результата. □

### 1.1.9. Ранг матрицы

**Определение 1.35.** Рассмотрим матрицу $A$ размера $m \times n$. Для $1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\}$ *минорами порядка* $k$ *матрицы* $A$ называются определители, которые состоят из элементов матрицы $A$, стоящих на пересечении любых $k$ строк и $k$ столбцов матрицы $A$.

**Определение 1.36.** Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы $A$ называется *рангом матрицы* $A$ и обозначается $\operatorname{rank} A$.

**Определение 1.37.** Отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы, называется *базисным*.

Пример 1.23. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Эта матрицы имеет шесть миноров порядка 1 (ее элементы). У нее есть три минора порядка 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -9. \tag{1.9}$$

Очевидно, что миноров порядка 3 и выше у матрицы $A$ нет.

Матрица $A$ содержит минор второго порядка, отличный от нуля, например второй из миноров (1.9). Это максимально возможный порядок миноров. Следовательно, $\operatorname{rank} A = 2$. Базисных, т.е. отличных от нуля, миноров порядка 2 в данном случае два: второй и третий из миноров (1.9).



**Свойства ранга матрицы**

**1.** *Для матрицы $A$ размера $m \times n$ ее ранг* $\operatorname{rank} A \leqslant \min\{m, n\}$.

**2.** *Ранг матрицы не меняется при транспонировании.*

**3.** *Ранг матрицы не меняется при вычеркивании нулевого ряда.*

**4.** *Ранг матрицы не меняется в результате элементарных преобразований.*

**5.** *Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее строк.*

Доказательства этих утверждений легко выводятся из свойств определителей.

Для нахождения ранга матрицы можно, следуя определению, перебирать миноры матрицы[1]. Мы же обратим внимание на весьма эффективный *метод элементарных преобразований*, основанный на рассмотренных свойствах ранга матрицы. Суть этого метода в том, что матрица приводится к ступенчатому виду путем проведения элементарных преобразований и вычеркивания нулевых рядов.

Пример 1.24. Найти методом элементарных преобразований ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 8 & -2 \\ 7 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Выберем в матрице $A$ элемент 1 в качестве разрешающего и занулим с его помощью другие элементы второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 11 & \boxed{3} & 8 & -2 \\ 7 & \boxed{2} & 3 & 3 \\ 4 & \boxed{1} & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & 13 \\ -1 & 0 & -7 & 13 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

[1] Отметим, что метод окаймления миноров, с которым можно ознакомиться в учебнике А.Г. Куроша «Курс высшей алгебры» [15], позволяет существенно сократить количество вычисляемых миноров.

Переписывая третью строку, содержащую разрешающий элемент без изменений, проделаем аналогичную процедуру с первыми двумя строками:

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & -7 & 13 \\ \boxed{-1} & 0 & -7 & 13 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Приведение матрицы $A$ к ступенчатому виду завершилось вычеркиванием нулевой второй строки.

Полученная ступенчатая матрица имеет две строки, поэтому $\operatorname{rank} A = 2$. Определитель, составленный из двух первых столбцов ступенчатой матрицы, не равен нулю. Значит, в качестве базисного минора матрицы $A$ можно взять соответствующий минор

$$\begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix},$$

стоящий на пересечении строк с номерами 1 и 3 и столбцов с номерами 1 и 2 матрицы $A$. □

## 1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

### 1.2.1. Основные понятия

**Определение 1.38.** *Системой $m$ линейных алгебраических уравнений с $n$ неизвестными* (СЛАУ) называется система уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.10}$$

Числа $a_{ij}$ называются *коэффициентами* при неизвестных, а $b_i$ — *свободными членами* уравнений системы.



**Определение 1.39.** Системе линейных уравнений (1.10) ставят в соответствие матрицу и два вектора-столбца:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

называемые соответственно *основной матрицей*, *вектором неизвестных* и *вектором свободных членов*. *Расширенной матрицей* называется матрица

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

получаемая присоединением к основной матрице вектора-столбца свободных членов.

Система (1.10) может быть переписана в так называемой *матричной форме*:

$$AX = B, \tag{1.11}$$

где $A$, $X$, $B$ — соответственно основная матрица, вектор неизвестных и вектор свободных членов.

**Определение 1.40.** *Решением системы* (1.10) называется набор значений неизвестных

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad \ldots, \quad x_n = c_n,$$

обращающих все уравнения системы в верные равенства. *Решить систему* — значит найти все ее решения.

**Определение 1.41.** Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

**Определение 1.42.** Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

**Определение 1.43.** Каждое отдельное решение неопределенной системы называется *частным*. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

**Определение 1.44.** Две системы называются *эквивалентными*, если совокупности их решений совпадают. В частности, любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

Нетрудно убедиться в том, что, не нарушая эквивалентности, можно выполнять элементарные преобразования над строками (но не над столбцами) расширенной матрицы системы.

**Определение 1.45.** *Однородной* называется система линейных уравнений, свободные члены $b_i$ уравнений которой равны нулю. В противном случае, т.е. когда хотя бы один из свободных членов $b_i$ отличен от нуля, система называется *неоднородной*.

Однородная система всегда совместна, так как имеет по крайней мере одно *тривиальное*, или *нулевое*, *решение*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0. \tag{1.12}$$

### 1.2.2. Матричный метод

Предположим, что основная матрица $A$ системы (1.10) квадратная и невырожденная. Тогда существует обратная матрица $A^{-1}$. Умножив левую и правую части системы в матричной форме (1.11) слева на $A^{-1}$, получим:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B, \quad EX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B.$$

Единственность найденного решения $X$ гарантируется единственностью обратной матрицы $A^{-1}$.

**Определение 1.46.** Метод решения системы линейных уравнений $AX = B$ с невырожденной квадратной матрицей $A$ по формуле $X = A^{-1}B$ называется *матричным*.

Пример 1.25. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y + z = 6, \\ 2x + y + z = 2, \\ x + y + 2z = 1. \end{cases}$



Р е ш е н и е. Выпишем основную матрицу и вектор свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $A$ мы уже рассматривали в примере 1.21. Там мы убедились, что она невырожденная, и нашли обратную

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим вектор неизвестных $X$ матричным методом:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1\cdot 6 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \\ (-3)\cdot 6 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 6 + (-2)\cdot 2 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$ — решение системы. Чтобы убедиться в его правильности, выполним проверку:

$$x - y + z = 2 - (-3) + 1 = 6,$$
$$2x + y + z = 2\cdot 2 + (-3) + 1 = 2,$$
$$x + y + 2z = 2 + (-3) + 2\cdot 1 = 1.$$

Как это и требуется, все уравнения системы обратились в верные равенства. □

*Замечание* 1.11. Матричный способ является весьма трудоемким с вычислительной точки зрения, так как требует отыскания обратной матрицы, что влечет за собой вычисление $n^2 + 1$ определителей, помимо последующей операции умножения.

### 1.2.3. Метод Крамера

**Теорема 1.5.** *Единственное решение системы линейных уравнений $AX = B$ с невырожденной квадратной матрицей $A = (a_{ij})$ можно получить по формулам:*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.13}$$

*где $\Delta = \det A$ — определитель основной матрицы, а определители*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.14}$$

*получаются из $\Delta$ заменой $i$-го столбца столбцом свободных членов.*

Доказательство. Воспользуемся матричной формой записи решения $X = A^{-1}B$, представлением обратной матрицы (1.6) и определением присоединенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \ldots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Но выражение $A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n$ представляет собой разложение определителя (1.14) по элементам $i$-го столбца, откуда и следует справедливость формул (1.13). □



**Определение 1.47.** Формулы (1.13) называются *формулами Крамера*. Метод решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей по формулам Крамера называется *методом Крамера*.

Пример 1.26. Решить систему линейных уравнений из примера 1.25 методом Крамера.

Решение. Определитель основной матрицы системы в данном случае совпадает с определителем, рассмотренным в примере 1.11. Там мы нашли, что $\Delta = 5$. Вычисляем определители $\Delta_i$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 6 = 12 - 1 + 2 - 1 + 4 - 6 = 10,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 6 \cdot 2 = 4 + 6 + 2 - 2 - 1 - 24 = -15,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 6 - 1 \cdot 1 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 = 1 - 2 + 12 - 6 - 2 + 2 = 5.$$

По формулам Крамера (1.13) находим:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-15}{5} = -3, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1. \quad \square$$

*Замечание* 1.12. Метод Крамера требует отыскания определителя системы $\Delta$ и $n$ определителей $\Delta_i$. Это делает его, как и матричный метод, весьма трудоемким.

### 1.2.4. Метод Гаусса

*Метод Гаусса* решения системы линейных уравнений состоит в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований, выполняемых над строками расширенной матрицы системы.

Будучи универсальным и вычислительно эффективным, метод Гаусса чаще всего применяется на практике. Его принято представлять в виде двух этапов: прямого и обратного хода.

*Прямой ход* состоит в последовательном исключении неизвестных. Для определенности будем считать, что в системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}x_1} + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \boxed{a_{21}x_1} + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \boxed{a_{31}x_1} + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boxed{a_{m1}x_1} + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

коэффициент $a_{11} \neq 0$. Если это не так, то выберем из коэффициентов $a_{i1}$ при переменной $x_1$ какой-либо ненулевой и поменяем местами содержащую его строку с первой. Такой ненулевой коэффициент обязательно найдется, поскольку в противном случае неизвестная $x_1$ не входила бы в систему. Теперь исключим переменную $x_1$ из всех уравнений системы, кроме первого. Для этого будем умножать обе части первого уравнения поочередно на

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \quad \ldots, \quad -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$$

и прибавлять получаемые результаты к соответствующим частям второго, третьего и всех остальных уравнений системы.

В процессе исключения неизвестных можно получить уравнения, в которых все коэффициенты при неизвестных равны нулю. Если среди таких уравнений найдется хотя бы одно, свободный член которого не равен нулю, то система несовместна, поскольку рассматриваемое уравнение не может обратиться в верное равенство ни при каких значениях неизвестных. В таком случае решение завершается. Те уравнения с нулевыми коэффициентами, свободные члены которых равны



нулю, верны независимо от значений неизвестных и потому просто отбрасываются.

После исключения неизвестной $x_1$ и отбрасывания нулевых строк придем к эквивалентной системе, число строк $l$ которой не больше числа строк $m$ исходной системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \boxed{a_{22}^{(2)}x_2} + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \boxed{a_{32}^{(2)}x_2} + a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boxed{a_{k2}^{(2)}x_2} + a_{k3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{kn}^{(2)}x_n = b_k^{(2)}. \end{cases}$$

На этом этапе первое уравнение уже сыграло свою роль и в дальнейшем просто переписывается.

Если $k = 1$, т.е. в системе осталось единственное уравнение, то прямой ход завершается. В противном случае система содержит другие уравнения, среди коэффициентов при неизвестных которых обязательно есть ненулевые. Для определенности будем считать, что $a_{22}^{(2)} \neq 0$. Если это не так, то, меняя порядок следования неизвестных, поместим на эту позицию любой из ненулевых элементов второй строки.

Теперь посредством второго уравнения исключаем переменную $x_2$ из всех уравнений начиная с третьего. Для этого выполняем те же операции, что и при исключении неизвестной $x_1$. Далее последовательно исключаем остальные неизвестные.

Прямой ход завершается приведением системы к *ступенчатому виду*, т.е. к такой эквивалентной системе, основная матрица которой имеет ступенчатый вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2k}^{(2)}x_k + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \ldots + a_{3k}^{(3)}x_k + \ldots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{rr}^{(r)}x_r + \ldots + a_{rn}^{(r)}x_n = b_r^{(r)}. \end{cases} \qquad (1.15)$$

Завершающий этап метода Гаусса, когда решается ступенчатая система (1.15), называется *обратным ходом* и осуществляется строго в обратном порядке по сравнению с прямым ходом. Из последнего уравнения неизвестная $x_r$ выражается через $x_{r+1}, \dots, x_n$. Это возможно, так как коэффициент $a_{rr}^{(r)}$ не равен нулю. Затем найденное значение $x_r$ подставляется в предпоследнее уравнение системы, что позволяет выразить $x_{r-1}$ через все те же $x_{r+1}, \dots, x_n$. Здесь мы опять используем тот факт, что коэффициент $a_{r-1,r-1}^{(r-1)}$ не равен нулю. Продолжая этот процесс, выразим неизвестные $x_1, \dots, x_r$, называемые *базисными*, через неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$, называемые *свободными*. Если в системе есть свободные неизвестные, то им можно придавать любые действительные значения, и потому система имеет бесконечно много решений.

*Замечание* 1.13. В качестве базисных можно, вообще говоря, выбирать различные наборы неизвестных. Однако очевидно, что количество базисных неизвестных в любом таком наборе будет равно $r$, т.е. рангу основной матрицы системы. Соответственно число свободных неизвестных всегда будет равно $n - r$.

Ступенчатая система (1.15), число уравнений $r$ которой равно числу неизвестных $n$, называется *треугольной*. Треугольная система имеет единственное решение, так как не содержит свободных неизвестных.

*Замечание* 1.14. Как видно, совместная система уравнений имеет единственное решение при $r = n$ и бесконечно много решений при $r < n$.

*Замечание* 1.15. При записи систем линейных уравнений, решаемых методом Гаусса, для удобства восприятия переменные с одинаковыми номерами, как правило, выравнивают, располагая их на одной вертикальной линии.

*Замечание* 1.16. В качестве разрешающих вовсе не обязательно выбирать коэффициенты, стоящие на главной диагонали основной матрицы системы. Мы так поступали, чтобы придать рассуждениям простой и наглядный вид. Это замечание позволяет избегать перестановки строк системы и смены порядка следования неизвестных, а также объявлять разрешающими только наиболее удобные для проведения вычислений коэффициенты (см. пример 1.27).



Пример 1.27. Решить систему линейных уравнений из примера 1.25 методом Гаусса.

Р е ш е н и е. Выполняем прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} \boxed{x} - y + z = 6, \\ \boxed{2x} + y + z = 2, \\ \boxed{x} + y + 2z = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z = 6, \\ 3y - \boxed{z} = -10, \\ 2y + \boxed{z} = -5, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z = 6, \\ 5y = -15, \\ 2y + z = -5. \end{cases}$$

Полученная система ступенчатая, так как может быть приведена к виду (1.15) путем перестановки строк и смены порядка следования неизвестных. Поскольку число ее уравнений равно числу неизвестных, она имеет треугольный вид, что гарантирует единственность решения.

Выполняем обратный ход:

$$y = \frac{-15}{5} = -3, \quad z = 5 - 2y = -5 - 2(-3) = 1,$$
$$x = 6 + y - z = 6 + (-3) - 1 = 2.$$

Итак, $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$. □

*Замечание* 1.17. Для сокращения записи и увеличения наглядности преобразования прямого хода метода Гаусса часто выполняют с коэффициентами расширенной матрицей системы.

Пример 1.28. Решить систему $\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + 10x_3 = -21, \\ -3x_1 + 6x_2 - 8x_3 = 12, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -11, \\ 5x_1 - 11x_2 + 14x_3 = -23. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Будем оперировать с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & -9 & 10 & -21 \\ \boxed{-3} & 6 & -8 & 12 \\ \boxed{2} & -5 & 6 & -11 \\ \boxed{5} & -11 & 14 & -23 \end{array}\right).$$

Ни в одном столбце этой матрицы нет элемента, на который делились бы нацело остальные элементы столбца. Именно такие элементы мы делали разрешающими во избежание дробей в вычислениях. Чтобы справиться с этой проблемой, домножим третью и четвертую строки на 3. Тогда все элементы первого столбца окажутся кратными его первому элементу, который мы и выберем разрешающим:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{3} & -9 & 10 & -21 \\ \boxed{-3} & 6 & -8 & 12 \\ \boxed{6} & -15 & 18 & -33 \\ \boxed{15} & -33 & 42 & -69 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 10 & -21 \\ 0 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & -2 & 9 \\ 0 & 12 & -8 & 36 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 10 & -21 \\ 0 & \boxed{-3} & 2 & -9 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & 9 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & 9 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 10 & -21 \\ 0 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 10 & -21 \\ 0 & -3 & 2 & -9 \end{array}\right).$$

Отсюда получим:

$$x_2 = \frac{2}{3}x_3 + 3,$$
$$x_1 = 3x_2 - \frac{10}{3}x_3 - 7 = 3\left(\frac{2}{3}x_3 + 3\right) - \frac{10}{3}x_3 - 7 = -\frac{4}{3}x_3 + 2.$$

В данном случае неизвестные $x_1$ и $x_2$ — базисные, неизвестная $x_3$ — свободная. Положив $x_3 = 3\alpha$, где $\alpha$ — произвольное действительное число, получим общее решение:

$$x_1 = -4\alpha + 2, \quad x_2 = 2\alpha + 3, \quad x_3 = 3\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Придавая $\alpha$ произвольные значения, можно получить любое решение системы. Например, при $\alpha = 0$ получим частное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$. □

### 1.2.5. Критерий Кронекера — Капелли

Часто бывает необязательно знать само решение системы линейных уравнений, а достаточно понимать, разрешима она в принципе



или нет. Ответ на этот вопрос может дать приводимый ниже общий критерий.

**Теорема 1.6 (критерий Кронекера — Капелли).** *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы:*

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

*Если при этом ранг $r$ равен числу неизвестных $n$, то система имеет единственное решение. Если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений, определяемых $n - r$ свободными неизвестными.*

Доказательство. В соответствии с рассуждениями при рассмотрении метода Гаусса система совместна в том и только в том случае, если в процессе исключения неизвестных не было получено ни одного уравнения с нулевыми коэффициентами и ненулевым свободным членом. Но, согласно свойствам ранга матрицы, это возможно тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы. Для завершения доказательства достаточно вспомнить замечания 1.13 и 1.14. □

Применим критерий Кронекера — Капелли к однородным системам линейных уравнений.

**Теорема 1.7.** *Однородная система линейных уравнений с $n$ неизвестными и основной матрицей $A$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы меньше числа неизвестных, т.е.* $\operatorname{rank} A < n$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть однородная система имеет ненулевое решение. Предположим от противного, что неравенство $\operatorname{rank} A < n$ неверно. Тогда $\operatorname{rank} A \geqslant n$. Но по свойству 1 ранга матрицы $\operatorname{rank} A \leqslant n$. Отсюда следует, что $\operatorname{rank} A = n$. В этом случае, согласно критерию Кронекера — Капелли, система имеет единственное решение. Это решение может быть только нулевым, поскольку любая однородная система имеет нулевое решение. Полученный вывод приводит к противоречию.

*Достаточность.* Пусть $\operatorname{rank} A < n$. Тогда на основании критерия Кронекера — Капелли система имеет бесконечно много решений, а значит, и хоть одно ненулевое. □

**Следствие 1.1.** *Если число уравнений однородной системы меньше числа ее неизвестных, то система имеет ненулевое решение.*

**Следствие 1.2.** *Если в однородной системе число уравнений равно числу неизвестных, то она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы системы равен нулю.*

Доказательство. Обозначим через $n$ размер основной матрицы $A$ системы, которая по условию является квадратной. Тогда очевидно, что строгое неравенство $\operatorname{rank} A < n$ равносильно равенству нулю определителя матрицы $A$. □

Пример 1.29. Решить систему $\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

Решение. Данная система однородная, поэтому для ее решения будет достаточно привести с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому виду основную, а не расширенную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 8 & -2 \\ 7 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Это уже было сделано нами в задаче 1.24 при нахождении ранга матрицы $A$. Там мы пришли к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & 13 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим:

$$x_1 = -7x_3 + 13x_4$$
$$x_2 = -4x_1 - 5x_3 + 5x_4 = -4(-7x_3+13x_4) - 5x_3 + 5x_4 = 23x_3 - 47x_4.$$

Переменные $x_3$ и $x_4$ свободные. Положив $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, получим общее решение:

$$x_1 = -7\alpha + 13\beta,\ x_2 = 23\alpha - 47\beta,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$ □



### 1.2.6. Экономическая модель Леонтьева

Предположим, что экономика страны насчитывает $n$ отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного личного и общественного потребления, лежащего вне сферы материального производства.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени, например год. Введем следующие обозначения.

**Определение 1.48.** *Вектором валового выпуска* назовем вектор-столбец $X = (x_i)$, где $x_i$ — общий, или валовой, объем продукции $i$-й отрасли.

**Определение 1.49.** *Вектором конечного продукта* назовем вектор-столбец $Y = (y_i)$, где $y_i$ — объем конечного продукта $i$-й отрасли для непроизводственного потребления.

**Определение 1.50.** *Матрицей прямых затрат* назовем квадратную матрицу $A = (a_{ij})$, где $a_{ij}$ — *коэффициенты прямых затрат*, показывающие затраты продукции $i$-й отрасли на производство единицы продукции $j$-й отрасли.

Так как валовой объем продукции $i$-й отрасли равен суммарному объему ее продукции, потребляемой всеми отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.16}$$

**Определение 1.51.** Уравнения (1.16) называются *соотношениями баланса* и задают *модель Леонтьева многоотраслевой экономики.*

Перепишем соотношения баланса (1.16) в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right) = y_1, \\ x_2 - \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\right) = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - \left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n\right) = y_n. \end{cases}$$

Полученную систему преобразуем к матричному виду:

$$X - AX = Y, \quad EX - AX = Y, \quad (E - A)X = Y, \qquad (1.17)$$

где $E$ — единичная матрица.

*Основная задача межотраслевого баланса* состоит в отыскании такого валового объема продукции для каждой из отраслей, который при известных прямых затратах обеспечивает заданный конечный продукт.

Из экономического смысла матрицы $A$ и вектора $Y$ следует, что все их элементы неотрицательны. В данном подпараграфе мы будем называть такие матрицы *неотрицательными*, а матрицы со строго положительными элементами — *положительными*. Очевидно, что вектор неизвестных $X$ также должен быть неотрицательным. Сформулируем условия, обеспечивающие выполнение этого требования.

**Определение 1.52.** Неотрицательная матрица $A$ называется *продуктивной*, если для любого неотрицательного вектора $Y$ существует неотрицательное решение $X$ системы (1.17). В этом случае и модель Леонтьева, определяемая матрицей $A$, также называется продуктивной.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы прямых затрат. Приведем некоторые из них.

**Теорема 1.8 (первый критерий продуктивности).** *Если матрица $A$ неотрицательная и для некоторого положительного вектора $Y^*$ система* (1.17) *имеет неотрицательное решение $X$, то матрица $A$ продуктивна.*

Из соотношения (1.17) в случае существования обратной матрицы $(E - A)^{-1}$ следует, что

$$X = (E - A)^{-1}Y.$$

Матрица $(E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*.

Следующая теорема дает более эффективное условие продуктивности.

**Теорема 1.9 (второй критерий продуктивности).** *Неотрицательная матрица $A$ продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и неотрицательна.*



**Теорема 1.10 (третий критерий продуктивности).** *Неотрицательная матрица $A$ продуктивна, если сумма элементов любого ее столбца или любой строки меньше единицы.*

Пример 1.30. Определите вектор $X$ валового выпуска продукции трех отраслей, если известны матрица прямых затрат $A$ и вектор конечного продукта $Y$:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}10 & 0{,}14 \\ 0{,}03 & 0{,}04 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}06 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 510 \\ 405 \\ 482 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Сразу отметим, что, согласно третьему критерию продуктивности, матрица $A$ является продуктивной. Будем приводить к ступенчатому виду расширенную матрицу $(E - A|Y)$ системы (1.17):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0{,}92 & -0{,}10 & -0{,}14 & 510 \\ -0{,}03 & 0{,}96 & -0{,}09 & 405 \\ -0{,}06 & -0{,}08 & 0{,}94 & 482 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{46} & -5 & -7 & 25\,500 \\ \boxed{-1} & 32 & -3 & 13\,500 \\ \boxed{-3} & -4 & 47 & 24\,100 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & \boxed{1467} & -145 & 646\,500 \\ -1 & 32 & -3 & 13\,500 \\ 0 & \boxed{-100} & 56 & -16\,400 \end{array}\right).$$

Домножим первую строку матрицы на 100, чтобы сделать второй ее элемент кратным выбранному разрешающему элементу:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & \boxed{146700} & -14\,500 & 64\,650\,000 \\ -1 & 32 & -3 & 13\,500 \\ 0 & \boxed{-100} & 56 & -16\,400 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 67652 & 40\,591\,200 \\ -1 & 32 & -3 & 13\,500 \\ 0 & -100 & 56 & -16\,400 \end{array}\right).$$

Отсюда получаем:

$$x_3 = 600, \quad x_2 = \frac{56x_3 + 16\,400}{100} = 500, \quad x_1 = 32x_2 - 3x_3 - 13\,500 = 700.$$

Итак, чтобы обеспечить конечный продукт $Y$, необходимо выпустить 700 единиц продукции первой отрасли, 500 — второй и 600 — третьей отрасли. □

# 1.3. Векторная алгебра

## 1.3.1. Векторы в пространстве

Многие величины, например сила и скорость, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называются *векторными*.

**Определение 1.53.** *Вектором* $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок с началом в точке $A$ и концом в точке $B$. Определенный таким образом вектор называют еще *связанным*.

**Определение 1.54.** *Длиной* или *модулем вектора* называется длина соответствующего направленного отрезка. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

**Определение 1.55.** Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\mathbf{0}$.

**Определение 1.56.** Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* или *ортом* и обозначается $\mathbf{e}$.

**Определение 1.57.** Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ могут быть *одинаково направлены*, иначе сонаправлены, или *противоположно направлены*, что соответственно обозначается $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ или $\overrightarrow{AB} \downarrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

**Определение 1.58.** Два вектора называются *равными*, если они имеют равные длины и сонаправлены.

**Определение 1.59.** *Свободным вектором* или *параллельным переносом* называется совокупность равных между собой векторов.

У свободного вектора нет определенных начальной и конечной точек, поэтому для его обозначения применяются строчные буквы латинского алфавита, например $\mathbf{a}$.

**Определение 1.60.** *Углом между векторами* называется наименьший угол, на который надо повернуть один из векторов, чтобы его направление совпадало с направлением второго. Для угла $\varphi$ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вводится обозначение $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$.



Ясно, что для всякого угла $\varphi$ между векторами верно двойное неравенство $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

**Определение 1.61.** Если $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \pi/2$, то говорят, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ *ортогональны*, и пишут $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

**Определение 1.62.** *Произведением вектора* $\mathbf{a}$ *на число* $k$ называется вектор $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$, длина которого $|\mathbf{b}| = |k||\mathbf{a}|$ и направление совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, если $k > 0$, и противоположно ему, если $k < 0$ (рис. 1.4).

*Замечание* 1.18. Из определения 1.62 следует, что ненулевые векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда для некоторого числа $k$ верно равенство $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$, причем при $k > 0$ векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сонаправлены, при $k < 0$ — противоположно направлены.

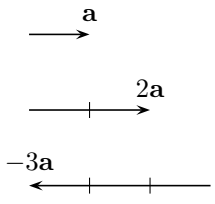

Рис. 1.4

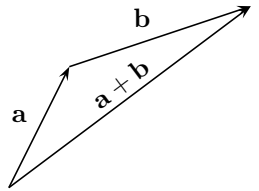

Рис. 1.5

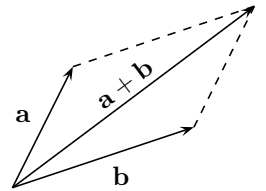

Рис. 1.6

**Определение 1.63.** *Противоположным вектором* $-\mathbf{a}$ называется произведение вектора $\mathbf{a}$ на число $-1$, т.е. $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$.

**Определение 1.64.** Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — любые два вектора. Поместим начало вектора $\mathbf{b}$ в конец вектора $\mathbf{a}$. Вектор, соединяющий начало вектора $\mathbf{a}$ с концом вектора $\mathbf{b}$, назовем *суммой векторов* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и будем обозначать $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Это правило сложения векторов называют *правилом треугольника* (рис. 1.5).

Сумму двух векторов можно построить также по *правилу параллелограмма* (рис. 1.6). Сложить несколько векторов можно по *правилу ломаной*, которое является обобщением правила треугольника (рис. 1.7).

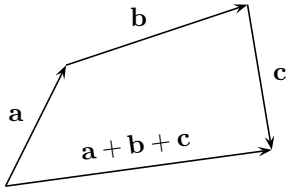


Рис. 1.7

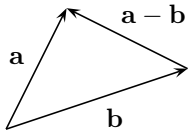


Рис. 1.8

**Определение 1.65.** *Разностью двух векторов* **a** и **b** называется сумма вектора **a** и вектора $-\mathbf{b}$, противоположного **b** (рис. 1.8).

**Определение 1.66.** *Линейными операциями над векторами* называются операции сложения и вычитания векторов и операция умножения вектора на число.

### 1.3.2. Алгебраическое описание вектора

Для алгебраического описания векторов их связывают с некоторой прямоугольной декартовой системой координат.

**Определение 1.67.** Рассмотрим произвольный вектор **a** на плоскости. Поместим его начало в начало выбранной прямоугольной декартовой системы координат. Тогда конец вектора **a** однозначно определит некоторую точку $M$ плоскости, координаты $x, y$ которой будем называть *координатами вектора* **a** (рис. 1.9).

Наоборот, задав произвольную точку плоскости $M(x, y)$, мы тем самым определим вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 1.9).

Аналогично устанавливается взаимно однозначное соответствие векторов и точек пространства. В этом случае координатами вектора **a** считаются координаты $x, y, z$ соответствующей точки $M$ пространства. В дальнейшем мы сосредоточимся на рассмотрении пространственного случая.

*Замечание* 1.19. Мы установили взаимно однозначное соответствие точек трехмерного пространства или плоскости и векторов. Это позволяет полностью отвлечься от геометрического смысла векторов и иметь дело лишь с координатами.



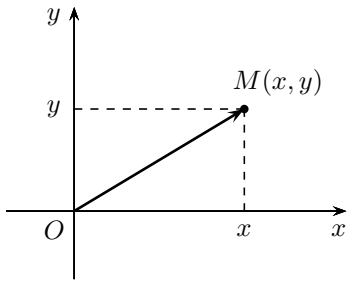


Рис. 1.9

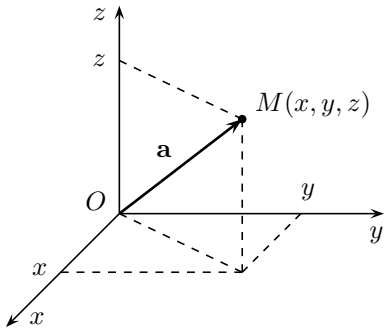


Рис. 1.10

Согласно теореме Пифагора длина вектора **a** с координатами $x$, $y$, $z$ (рис. 1.10) может быть найдена по формуле

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.18}$$

Линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над их координатами. А именно, верна следующая теорема.

**Теорема 1.11.** *Если* $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *и* $k$ *— число, то*

$$k\mathbf{a} = (kx_1, ky_1, kz_1), \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \tag{1.19}$$

Если даны две точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то вектор с началом в точке $M_1$ и концом в точке $M_2$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = \\ = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Расстояние $M_1M_2$ между точками $M_1(x, y, z)$ и $M_2(x, y, z)$ пространства равно длине вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$M_1M_2 = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1.20}$$

**Теорема 1.12.** *Ненулевые векторы* $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ *и* $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:*

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Доказательство. Согласно замечанию 1.18 векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда для некоторого числа $k$ верно равенство $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$. По теореме 1.11 это равносильно покоординатным равенствам $x_1 = kx_2$, $y_1 = ky_2$, $z_1 = kz_2$, которые могут быть переписаны в виде

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k. \qquad \square$$

Все перечисленные выше результаты верны и для векторов на плоскости. Например, расстояние между точками $M_1(x, y)$ и $M_2(x, y)$ может быть вычислено по формуле

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.21}$$

### 1.3.3. Скалярное произведение векторов

**Определение 1.68.** *Скалярным произведением двух векторов* называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначается $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ или просто $\mathbf{ab}$. Итак,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \tag{1.22}$$

*Замечание* 1.20. Ясно, что два ненулевых вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Следующая теорема позволяет выражать скалярное произведение двух векторов через их координаты.

**Теорема 1.13.** *Если* $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ *и* $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, *то*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{1.23}$$



Доказательство. Рассмотрим вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. По теореме косинусов (рис. 1.8)

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}),$$

откуда по определению скалярного произведения (1.22)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2\Big). \tag{1.24}$$

По формуле (1.18), выражающей длину вектора через его координаты,

$$|\mathbf{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad |\mathbf{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

Для вектора $\mathbf{c} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ аналогично имеем:

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}|^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2. \end{aligned}$$

Подставим выражения для длин векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ в равенство (1.24):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}\Big(2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2\Big) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad \square$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами, которые легко выводятся из определения 1.68 либо координатного представления (1.23):

1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
2) $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$;
3) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$;
4) $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$.

Скалярное произведение применяют для вычисления угла между векторами. В самом деле, по определению скалярного произведения (1.22) и представлениям через координаты скалярного произведения (1.23) и длины вектора (1.18)

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{1.25}$$

Скалярное произведение векторов на плоскости определяется так же и имеет такие же свойства. В частности, если $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$ и $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2, \quad \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

### 1.3.4. $n$-мерное векторное пространство

Отвлекаясь от геометрической природы вектора, мы заменили его упорядоченной тройкой чисел — координатами. Оказывается, существуют объекты различной, а не только геометрической, природы, которые ведут себя, как векторы. Таким объектам можно поставить в соответствие упорядоченный набор действительных чисел, который позволит исследовать их теми же методами, что и векторы в пространстве.

Пример 1.31. Алгебраическому многочлену третьей степени

$$P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

можно поставить в соответствие упорядоченный набор $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ из четырех чисел — его коэффициентов.

Пример 1.32. Каждой матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

размера $2\times3$ соответствует набор $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23})$, состоящий из шести чисел.

Пример 1.33. Если для производства изделий определенного вида используется пять ресурсов, то каждому изделию этого вида можно поставить в соответствие упорядоченный набор $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ чисел, показывающих, сколько единиц соответствующего ресурса требуется для производства изделия.

Рассмотренные примеры свидетельствуют о том, что для алгебраического описания объектов общего вида трех координат может быть недостаточно. Это приводит к целесообразности обобщения понятия вектора на случай любой конечной упорядоченной совокупности действительных чисел. Такая абстракция избавляет от необходимости изучения алгебраических свойств объектов каждого типа в отдельности.

**Определение 1.69.** *$n$-мерным вектором* $\mathbf{x}$ назовем упорядоченную совокупность $n$ действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые будем называть *координатами вектора* $\mathbf{x}$.



**Определение 1.70.** *Линейные операции над $n$-векторами*

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

определяются как обобщение линейных операций (1.19) над векторами в пространстве в координатной форме:

$$\begin{aligned} k\mathbf{x} &= (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n), \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y} &= (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n). \end{aligned}$$

**Определение 1.71.** Совокупность всех $n$-мерных векторов, для которых определены линейные операции, называется *$n$-мерным векторным пространством* и обозначается $\mathbb{R}^n$.

Линейные операции над векторами сводятся к операциям над их координатами, которые являются действительными числами, поэтому приводимые ниже законы, справедливые для действительных чисел, распространяются и на $n$-векторы. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $k, l \in \mathbb{R}$. Имеют место приведенные ниже свойства.

**1** **(коммутативность сложения).** $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.

**2** **(ассоциативность сложения).** $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.

**3** **(ассоциативность умножения на число).** $k(l\mathbf{x}) = (kl)\mathbf{x}$.

**4** **(дистрибутивность сложения векторов).** $k(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = k\mathbf{x}+k\mathbf{y}$.

**5** **(дистрибутивность сложения чисел).** $(k + l)\mathbf{x} = k\mathbf{x} + l\mathbf{x}$.

**6** **(существование нулевого вектора).** $\exists\, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n\colon\ \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$.

**7** **(существование противоположного вектора).**

$$\exists\, (-\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n\colon\ \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

**8** **(существование единицы при умножении на скаляр).**

$$1\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

### 1.3.5. Линейная зависимость векторов

Рассмотрим систему, состоящую из $k$ $n$-мерных векторов:

$$\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_k. \tag{1.26}$$

**Определение 1.72.** Вектор $\mathbf{a}$ называется *линейной комбинацией системы векторов* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$, если существуют такие числа $\lambda_1$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$, что

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k.$$

**Определение 1.73.** Система векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k = \mathbf{0}. \tag{1.27}$$

**Определение 1.74.** Система векторов $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_k$, которая не является линейно зависимой, называется *линейно независимой*. Для линейно независимой системы равенство (1.27) возможно лишь в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

**Теорема 1.14.** *Если среди векторов системы* (1.26) *есть нулевой вектор, то эта система линейно зависима.*

Доказательство. Пусть, например, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$. Тогда

$$1\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2 + \ldots + 0\mathbf{b}_k = \mathbf{0}.$$

Здесь $\lambda_1 = 1 \neq 0$, поэтому система (1.26) линейно зависима. □

**Теорема 1.15.** *Если система* (1.26) *содержит линейно зависимую подсистему, то она сама линейно зависима.*

Доказательство. Пусть, например, векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_l$, где $l < k$, линейно зависимы. Тогда существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_l\mathbf{b}_l = \mathbf{0}.$$

Отсюда следует равенство

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_l\mathbf{b}_l + 0\mathbf{b}_{l+1} + \ldots + 0\mathbf{b}_k = \mathbf{0},$$

которое и означает линейную зависимость системы (1.26). □



**Следствие 1.3.** *Если система векторов* (1.26) *линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.*

Доказательство. Предположим от противного, что данная система содержит зависимую подсистему. Тогда по теореме 1.15 вся система будет также зависимой, что неверно. □

**Теорема 1.16.** *Для того чтобы система* (1.26) *была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из ее векторов линейно выражался через остальные.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_k$ — линейно зависимые векторы. Тогда существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, из которых хотя бы одно, например $\lambda_l$, отлично от нуля, для которых

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_{l-1}\mathbf{b}_{l-1} + \lambda_l\mathbf{b}_l + \lambda_{l+1}\mathbf{b}_{l+1} + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k = \mathbf{0}.$$

В таком случае

$$\mathbf{b}_l = -\frac{\lambda_1}{\lambda_l}\mathbf{b}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_l}\mathbf{b}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_l}\mathbf{b}_{l-1} - \frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l}\mathbf{b}_{l+1} - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_l}\mathbf{b}_k.$$

Значит, вектор $\mathbf{b}_l$ линейно выражается через остальные, что и требовалось доказать.

*Достаточность.* Пусть, например, $\mathbf{b}_l$, где $0 \leqslant l \leqslant k$, выражается через остальные векторы системы:

$$\mathbf{b}_l = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_{l-1}\mathbf{b}_{l-1} + \lambda_{l+1}\mathbf{b}_{l+1} + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k.$$

Тогда

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_{l-1}\mathbf{b}_{l-1} + (-1)\mathbf{b}_l + \lambda_{l+1}\mathbf{b}_{l+1} + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k = \mathbf{0},$$

где $\lambda_l = -1 \neq 0$. Значит, система (1.26) линейно зависима. □

**Теорема 1.17.** *Если линейно независимая система* (1.26) *становится зависимой после добавления вектора* $\mathbf{a}$*, то последний линейно выражается через векторы системы* (1.26).

Доказательство. В этом случае имеет место равенство

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k + \lambda\mathbf{a} = \mathbf{0},$$

где хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1$, $\lambda_2$, …, $\lambda_k$, $\lambda$ не равен нулю. Коэффициент $\lambda$ не может равняться нулю, так как в противном случае система (1.26) оказалась бы линейно зависимой. Теперь, действуя так же, как и при доказательстве теоремы 1.16, линейно выражаем вектор $\mathbf{a}$ через векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$. □

**Определение 1.75.** Если вектор $\mathbf{a}$ является линейной комбинацией векторов линейно независимой системы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$, т.е.

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \ldots + a_k\mathbf{b}_k, \tag{1.28}$$

то числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называются *координатами вектора* $\mathbf{a}$ *в системе* $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$.

**Теорема 1.18.** *Координаты вектора* $\mathbf{a}$ *в линейно независимой системе* (1.26) *определяются однозначно, т.е. разложение* (1.28) *единственно.*

Доказательство. Предположим, что наряду с разложением (1.28) имеет место разложение

$$\mathbf{a} = a'_1\mathbf{b}_1 + a'_2\mathbf{b}_2 + \ldots + a'_k\mathbf{b}_k.$$

Вычтем почленно одно разложение вектора $\mathbf{a}$ из другого:

$$\mathbf{0} = (a_1 - a'_1)\mathbf{b}_1 + (a_2 - a'_2)\mathbf{b}_2 + \ldots + (a_k - a'_k)\mathbf{b}_k.$$

В силу линейной независимости системы (1.26) все коэффициенты при векторах этой системы должны быть равны нулю. Значит, имеют место равенства $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2$, …, $a_k = a'_k$, из которых следует единственность разложения. □

**Определение 1.76.** *Единичными векторами* $n$*-мерного пространства* назовем векторы

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\\
&\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned} \tag{1.29}$$



**Теорема 1.19.** *Система единичных векторов* (1.29) *линейно независима.*

Доказательство. Предположим, что

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Тогда по определению единичных векторов (1.29)

$$\lambda_1(1, 0, \ldots, 0) + \lambda_2(0, 1, \ldots, 0) + \lambda_n(0, 0, \ldots, 1) = (0, 0, \ldots, 0),$$

а значит,

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Отсюда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Значит, система (1.29) линейно независима. □

**Теорема 1.20.** *Любой вектор* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $n$*-мерного пространства является линейной комбинацией единичных векторов этого пространства, причем координаты вектора* $\mathbf{a}$ *в системе* (1.29) *совпадают с его координатами* $a_1$, $a_2$, …, $a_n$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= a_1(1, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + a_n(0, 0, \ldots, 1) =\\
&= a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n.
\end{aligned}$$ □

### 1.3.6. Базис и ранг системы векторов

**Определение 1.77.** *Базисом системы векторов* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_m$ называется содержащая максимально возможное количество векторов ее линейно независимая подсистема.

*Замечание* 1.21. Система векторов может иметь несколько базисов, причем все они содержат одинаковое число векторов.

**Определение 1.78.** Число элементов базиса называется *рангом системы векторов.*

**Определение 1.79.** Пусть известны координаты системы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_m$ в линейно независимой системе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$:

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}), \quad \mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2k}), \ldots,$$
$$\mathbf{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mk}).$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} \end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

составленная из этих координат, называется *матрицей системы векторов* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_m$ в системе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$.

**Теорема 1.21.** *Система векторов* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_m$, *имеющая матрицу* (1.30) *в линейно независимой системе* $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$, *линейно зависима тогда и только тогда, когда число* $m$ *векторов этой системы больше ранга* $r$ *матрицы* (1.30).

Доказательство. Система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_m$ линейно зависима тогда и только тогда, когда существует набор чисел $\lambda_1$, $\lambda_2$, …, $\lambda_m$, среди которых есть не равные нулю, причем линейная комбинация

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}.$$

Подставим вместо векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_m$ их разложения по системе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$:

$$\lambda_1\Big(a_{11}\mathbf{b}_1 + a_{12}\mathbf{b}_2 + \ldots + a_{1k}\mathbf{b}_k\Big) + \\ + \lambda_2\Big(a_{21}\mathbf{b}_1 + a_{22}\mathbf{b}_2 + \ldots + a_{2k}\mathbf{b}_k\Big) + \ldots + \\ + \lambda_m\Big(a_{m1}\mathbf{b}_1 + a_{m2}\mathbf{b}_2 + \ldots + a_{mk}\mathbf{b}_k\Big) = \mathbf{0}.$$



Сгруппируем слагаемые при $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$:

$$\Big(a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \ldots + a_{m1}\lambda_m\Big)\mathbf{b}_1 + \\ + \Big(a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{m2}\lambda_m\Big)\mathbf{b}_2 + \ldots + \\ + \Big(a_{1k}\lambda_1 + a_{2k}\lambda_2 + \ldots + a_{mk}\lambda_m\Big)\mathbf{b}_k = \mathbf{0}.$$

В силу линейной независимости системы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$ последнее равенство равносильно однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \ldots + a_{m1}\lambda_m = 0, \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{m2}\lambda_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1k}\lambda_1 + a_{2k}\lambda_2 + \ldots + a_{mk}\lambda_m = 0. \end{cases}$$

По теореме 1.7 эта система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг $r$ матрицы (1.30) меньше числа неизвестных $m$. □

**Следствие 1.4.** *Для того чтобы система из* $k$ *векторов была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица в любой линейно независимой системе, состоящей из* $k$ *векторов, была невырожденной.*

**Следствие 1.5.** *Система из* $m$ *векторов, представимых в виде линейных комбинаций векторов* $k$*-элементной линейно независимой системы, линейно зависима, если* $m > k$.

**Теорема 1.22.** *Ранг системы векторов* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_m$ *равен рангу* $r$ *матрицы* $A$ *этой системы в любой линейно независимой системе* $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$, *причем в качестве базиса системы* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_m$ *можно взять ее подсистему, соответствующую произвольному базисному минору матрицы* $A$.

Доказательство. Пусть подсистема $\mathbf{a}_{n_1}$, $\mathbf{a}_{n_2}$, …, $\mathbf{a}_{n_r}$ соответствует базисному минору матрицы $A$. Тогда ранг матрицы $A'$ этой подсистемы в системе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$ равен $r$ и равен числу векторов подсистемы. По теореме 1.21 это означает, что построенная подсистема линейно независимая.

Выберем произвольную подсистему $\mathbf{a}_{n_1}, \mathbf{a}_{n_2}, \ldots, \mathbf{a}_{n_l}$, количество векторов которой $l$ больше ранга $r$ матрицы $A$. Ранг матрицы $A''$ этой подсистемы в системе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b}_k$ не превосходит ранга $r$ всей матрицы $A$. Таким образом, количество векторов построенной подсистемы больше ранга матрицы $A''$ этой подсистемы. Согласно теореме 1.21 такая подсистема линейно зависимая. □

Пример 1.34. Найти ранг и какой-либо базис системы векторов

$$\mathbf{a}_1 = (11, 3, 8, -2), \quad \mathbf{a}_2 = (7, 2, 3, 3), \quad \mathbf{a}_3 = (4, 1, 5, -5).$$

Решение. Матрица данной системы векторов в системе единичных векторов совпадает с матрицей $A$, рассмотренной в примере 1.24. Там мы нашли, что $\operatorname{rank} A = 2$ и в качестве базисного можно взять минор матрицы $A$, стоящий на пересечении строк 1 и 3 со столбцами 1 и 2. Тогда по теореме 1.22 ранг данной системы векторов равен 2, а в качестве базиса можно взять векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_3$. □

### 1.3.7. Базис пространства

**Определение 1.80.** *Базисом $n$-мерного векторного пространства* назовем любые $n$ линейно независимых векторов этого пространства.

**Теорема 1.23.** *Любой вектор $\mathbf{a}$ $n$-мерного векторного пространства разлагается по любому базису этого пространства $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b}_n$, причем единственным образом.*

Доказательство. Добавив к векторам $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b}_n$ вектор $\mathbf{a}$, получим систему $n+1$ векторов, каждый из которых в силу теоремы 1.20 представим в виде линейной комбинации линейно независимых по теореме 1.19 $n$ единичных векторов (1.29). Согласно следствию 1.5 система $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n, \mathbf{a}$ линейно зависима. Для завершения доказательства достаточно вспомнить теоремы 1.17 и 1.18. □

**Теорема 1.24.** *Не существует линейно независимой системы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b}_k$ с числом векторов $k$, меньшим $n$, по которой бы разлагался любой вектор $n$-мерного векторного пространства.*



Доказательство. Если бы такая система существовала, то по ней, в частности, разлагались бы $n$ единичных векторов (1.29). Так как $n > k$, то, согласно следствию 1.5, система единичных векторов оказалась бы линейно зависимой, что противоречит теореме 1.19. □

**Следствие 1.6.** *Линейно независимая система $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b}_k$, число векторов $k$ которой меньше $n$, может быть дополнена до базиса всего $n$-мерного векторного пространства.*

Доказательство. В качестве $\mathbf{b}_{k+1}$ можно взять какой-либо вектор, не разлагающийся по системе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b}_k$. Существование такого вектора обеспечивает теорема 1.24. Повторяем эту процедуру, пока количество векторов в системе не станет равным $n$. □

*Замечание* 1.22. На практике дополнять систему векторов до базиса удобнее всего с помощью единичных векторов.

Пример 1.35. Показать, что векторы

$$\mathbf{b}_1 = (1, 2, 1), \quad \mathbf{b}_2 = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{b}_3 = (1, 1, 2)$$

образуют базис, и разложить вектор $\mathbf{a} = (6, 2, 1)$ по этому базису.

Решение. В примере 1.11 было найдено, что определитель матрицы $A$ системы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ равен 5, т.е. матрица $A$ невырожденная. Тогда по следствию 1.5 система $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ линейно независима и образует базис.

Найдем коэффициенты $a_1$, $a_2$ и $a_3$ разложения

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + a_3\mathbf{b}_3$$

вектора $\mathbf{a}$ по данному базису. Для этого приравняем левую и правую части разложения покоординатно. Получим систему линейных уравнений относительно неизвестных $a_1$, $a_2$ и $a_3$:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = 6, \\ 2a_1 + a_2 + a_3 = 2, \\ a_1 + a_2 + 2a_3 = 1, \end{cases}$$

Эта система решена в примере 1.27, где было найдено, что $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, $a_3 = 1$. Выписываем искомое разложение:

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3.$$ □

**Определение 1.81.** Подмножество $W$ пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть *подпространством*, если для любых двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ из $W$ и любого числа $k$ векторы $k\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ принадлежат $W$.

**Определение 1.82.** Любую максимальную линейно независимую систему векторов подпространства $W$ будем называть *базисом этого подпространства*.

Для подпространства имеет место следующее утверждение, аналогичное теореме 1.23.

**Теорема 1.25.** *Любой вектор подпространства может быть разложен единственным образом по базису этого подпространства.*

**Определение 1.83.** Число векторов в базисе подпространства назовем *размерностью подпространства*.

*Замечание* 1.23. Очевидно, что размерность подпространства $n$-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ не превосходит $n$.

Вектор неизвестных системы линейных уравнений по сути является $n$-мерным вектором. Это позволяет применять к решениям систем линейных уравнений теорию векторных пространств. Легко проверяется справедливость следующей теоремы.

**Теорема 1.26.** *Множество решений однородной системы линейных уравнений с $n$ неизвестными образует подпространство векторного пространства $\mathbb{R}^n$.*

**Определение 1.84.** *Фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений* называется базис ее подпространства решений.

В качестве следствия теоремы Кронекера — Капелли можно доказать следующий результат.

**Теорема 1.27.** *Если ранг $r$ матрицы однородной системы линейных уравнений меньше числа $n$ ее переменных, то фундаментальная система решений содержит $n-r$ векторов.*

Пример 1.36. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной системы уравнений из примера 1.29.



Р е ш е н и е. В примере 1.29 было найдено общее решение:

$$x_1 = -7\alpha + 13\beta,\ x_2 = 23\alpha - 47\beta,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Чтобы получить фундаментальную систему решений, поочередно приравниваем нулю все свободные неизвестные, кроме одной, которой придаем какое-либо ненулевое значение, например 1. Такой прием гарантирует линейную независимость получаемых частных решений. В данном случае имеем два решения:

$$\mathbf{a} = (-7, 23, 1, 0), \quad \mathbf{b} = (13, -47, 0, 1).$$

Очевидно, что общее решение представимо в виде $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Фундаментальная система в данном случае содержит два решения, что полностью согласуется с теоремой 1.27. □

### 1.3.8. Ортогональные системы векторов

В трехмерном пространстве скалярное произведение двух векторов определялось по формуле (1.22) через длины векторов и угол между ними. В $n$-мерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ обычно поступают по-другому. Скалярное произведение вводят, отталкиваясь от координатного представления (1.23) векторов. Понятия модуля, или длины, а также угла между векторами определяются через скалярное произведение.

**Определение 1.85.** *Скалярным произведением $n$-мерных векторов* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется число, равное сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

**Определение 1.86.** *Модулем $n$-мерного вектора* $\mathbf{x}$ называется корень квадратный из скалярного произведения этого вектора на самого себя:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

За основу понятия угла между векторами берется формула (1.25) для нахождения угла между трехмерными векторами через скалярное произведение.

**Определение 1.87.** *Косинус угла между $n$-мерными векторами* $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определяется следующим образом:

$$\cos(\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}}) = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}.$$

*Замечание* 1.24. Можно доказать, что $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$, и, таким образом, выражение, задающее косинус угла между векторами, как мы того и ожидаем, не превосходит по модулю единицы.

**Определение 1.88.** *Расстоянием $M_1M_2$ между точками*

$$M_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad M_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

называется длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$M_1M_2 = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

Из определения скалярного произведения вытекает справедливость следующих его свойств:

1) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$;
2) $(k\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = k(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$;
3) $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$.

**Определение 1.89.** *Евклидово пространство* — это $n$-мерное векторное пространство, в котором задано скалярное произведение.

**Определение 1.90.** Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ $n$-мерного пространства назовем *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. если $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$.

**Определение 1.91.** Набор ненулевых взаимно ортогональных векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$ будем называть *ортогональной системой векторов*.

*Замечание* 1.25. Для ортогональной системы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$ справедливо, что $\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}_j = 0$, если $i \neq j$.



Пример 1.37. Простейшей ортогональной системой является система единичных векторов (1.29).

**Теорема 1.28.** *Пусть вектор* $\mathbf{a}$ *представим в виде линейной комбинации векторов ортогональной системы* $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$*:*

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \ldots + a_k\mathbf{b}_k.$$

*Тогда коэффициенты* $a_1$, $a_2$, …, $a_k$ *этого разложения могут быть найдены по формулам*:

$$a_i = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_i}{|\mathbf{b}_i|^2}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{1.31}$$

Доказательство. Для $1 \leqslant i \leqslant n$ домножим обе части разложения

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \ldots + a_{i-1}\mathbf{b}_{i-1} + a_i\mathbf{b}_i + a_{i+1}\mathbf{b}_{i+1} + \ldots + a_k\mathbf{b}_k$$

скалярно на вектор $\mathbf{b}_i$:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_i = a_1(\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_i) + a_2(\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{b}_i) + \ldots + a_{i-1}(\mathbf{b}_{i-1}\cdot\mathbf{b}_i) + \\ + a_i(\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}_i) + a_{i+1}(\mathbf{b}_{i+1}\cdot\mathbf{b}_i) + \ldots + a_k(\mathbf{b}_k\cdot\mathbf{b}_i).$$

В силу ортогональности системы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$ все скалярные произведения в правой части, кроме $\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}_i$, обратятся в нуль. Значит,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_i = a_i(\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}_i) = a_i|\mathbf{b}_i|^2,$$

откуда и выводятся представления коэффициентов (1.31). □

**Теорема 1.29.** *Ортогональная система векторов* $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$ *линейно независима.*

Доказательство. Предположим, что

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k = \mathbf{0}.$$

Тогда по теореме 1.28

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{0}\cdot\mathbf{b}_i}{|\mathbf{b}_i|^2} = \frac{0}{|\mathbf{b}_i|^2} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

т.е. все коэффициенты $\lambda_i$ равны нулю, что и означает линейную независимость рассматриваемой ортогональной системы. □

**Следствие 1.7.** *Ортогональная система, состоящая из n векторов, образует базис n-мерного векторного пространства.*

**Определение 1.92.** Базис, образованный ортогональной системой векторов, называется *ортогональным базисом.*

**Определение 1.93.** Ортогональный базис, длины векторов которого равны единице, называется *ортонормированным.*

Пример 1.38. Система единичных векторов (1.29) является ортонормированным базисом пространства $\mathbb{R}^n$. Частный случай этого базиса — базис $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$ в $\mathbb{R}^3$.

**Теорема 1.30.** *Координаты вектора в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям этого вектора на соответствующие базисные векторы.*

Доказательство. Справедливость теоремы следует из формулы (1.31) с учетом того, что знаменатель $|\mathbf{b}_i^2|$ в силу ортонормированности системы равен единице. □

Пример 1.39. Проверить, образует ли ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^3$ система векторов

$$\mathbf{b}_1 = \left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right), \quad \mathbf{b}_2 = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{2}{7}\right), \quad \mathbf{b}_3 = \left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right),$$

и найти разложение вектора $\mathbf{a} = (2,-3,1)$ в этом базисе.

Решение. Вычисляем попарные скалярные произведения:

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = -\frac{6}{49} + \frac{18}{49} - \frac{12}{49} = 0, \quad \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_3 = -\frac{12}{49} - \frac{6}{49} + \frac{18}{49} = 0,$$
$$\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_3 = \frac{18}{49} - \frac{12}{49} - \frac{6}{49} = 0.$$

Итак, система ортогональная. Несложно убедиться, что длины всех векторов системы равны единице, поэтому система ортонормированная. Количество векторов в системе равно размерности пространства $\mathbb{R}^3$. Значит, данная система образует ортонормированный базис.



Координаты $a_1$, $a_2$, $a_3$ вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ найдем с помощью теоремы 1.30:

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1 = (2,-3,1)\left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) = -1,$$
$$a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_2 = (2,-3,1)\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{2}{7}\right) = -2,$$
$$a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_3 = (2,-3,1)\left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right) = 3.$$ □

### 1.3.9. Собственные векторы и собственные значения

**Определение 1.94.** Число $\lambda$ называется *собственным значением квадратной матрицы* $A$, если существует такой ненулевой вектор-столбец $X$, для которого

$$AX = \lambda X. \tag{1.32}$$

При этом вектор-столбец $X$, удовлетворяющий равенству (1.32), называется *собственным вектором матрицы* $A$, *соответствующим собственному значению* $\lambda$.

Преобразуем равенство (1.32):

$$AX = \lambda X, \quad AX = \lambda EX, \quad AX - \lambda EX = O,$$

где $O$ — нуль-матрица. Отсюда выводим матричное равенство

$$(A - \lambda E)X = O, \tag{1.33}$$

в развернутом виде представляющее собой линейную однородную систему уравнений с вектором неизвестных $X$.

**Определение 1.95.** Определитель основной матрицы однородной системы (1.33)

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \tag{1.34}$$

называется *характеристическим многочленом матрицы* $A$.

**Определение 1.96.** Уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

получаемое приравниванием нулю характеристического многочлена матрицы $A$, называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами матрицы* $A$.

**Теорема 1.31.** *Число $\lambda$ является собственным значением квадратной матрицы $A$ тогда и только тогда, когда оно будет характеристическим числом этой матрицы.*

Доказательство. Число $\lambda$ — собственное значение матрицы $A$ тогда и только тогда, когда система линейных однородных уравнений (1.33) имеет ненулевые решения. Согласно следствию 1.2 это равносильно равенству нулю определителя основной матрицы рассматриваемой системы, т.е. характеристического многочлена. Последнее утверждение равносильно тому, что $\lambda$ является характеристическим числом. □

**Определение 1.97.** Совокупность всех собственных значений квадратной матрицы $A$ с учетом их кратности как корней характеристического уравнения называется *спектром матрицы* $A$.

### Свойства собственных векторов

**1.** *Собственный вектор матрицы $A$ соответствует единственному собственному значению.*

Доказательство. Если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — два собственных значения, которым соответствует собственный вектор $X$, то

$$AX = \lambda_1 X, \quad AX = \lambda_2 X.$$

Вычитая эти равенства, имеем: $O = (\lambda_1 - \lambda_2)X$. Поскольку собственный вектор ненулевой, то $\lambda_1 = \lambda_2$. □

**2.** *Множество собственных векторов, соответствующих одному собственному значению $\lambda$, является подпространством векторного пространства $\mathbb{R}^n$.*



Доказательство. Все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda$, являются решениями однородной системы линейных уравнений (1.33) и потому в силу теоремы 1.26 образуют подпространство в $\mathbb{R}^n$. □

**3.** *Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. Пусть собственным векторам $X_1$ и $X_2$ соответствуют различные собственные значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Если векторы $X_1$ и $X_2$ линейно зависимы, то по теореме 1.16 один из этих векторов, например $X_1$, линейно выражается через другой, т.е. $X_1 = kX_2$, где $k \neq 0$. Тогда по свойству 2 вектор $X_1$ соответствует собственному значению не только $\lambda_1$, но и $\lambda_2$, что невозможно в силу свойства 1. □

Пример 1.40. Найти собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выписываем характеристический многочлен (1.34):

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-4-\lambda) + 18 =$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Имеем два собственных значения: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 2$.

Находим собственный вектор $X_1$, соответствующий значению $\lambda_1$, как ненулевое решение однородной системы $(A - \lambda_1 E)X_1 = O$. Для решения этой системы приводим ее основную матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 5-(-1) & 6 \\ -3 & -4-(-1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этой ступенчатой матрице соответствует уравнение $x + y = 0$. Его общее решение имеет вид $y = -x$, где $x$ может принимать

любое значение. В качестве ненулевого можно выбрать, например, частное решение $x = 1$, $y = -1$, определяющее собственный вектор $X_1 = (1, -1)$.

Аналогичным образом отыскиваем собственный вектор $X_2$, соответствующий значению $\lambda_2$, как ненулевое решение однородной системы $(A - \lambda_2 E)X_2 = O$:

$$\begin{pmatrix} 5-2 & 6 \\ -3 & -4-2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение этой системы имеет вид $x = -2y$, где $y \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что можно, например, принять $X_2 = (-2, 1)$. □

# Глава 2

# Аналитическая геометрия

## 2.1. Прямая на плоскости

### 2.1.1. Простейшие задачи

В основе аналитической геометрии лежит возможность однозначного описания точек с помощью упорядоченных наборов чисел, называемых *координатами*. Это позволяет активно применять алгебраические методы для решения геометрических задач.

Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат. Как мы уже знаем из векторной алгебры (см. формулу (1.21)), расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ плоскости (рис. 2.1) может быть найдено следующим образом:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

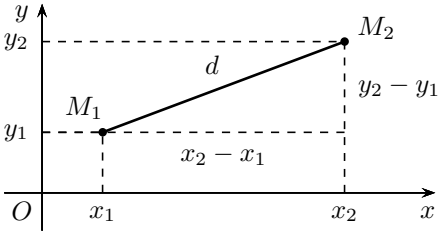


**Рис. 2.1**

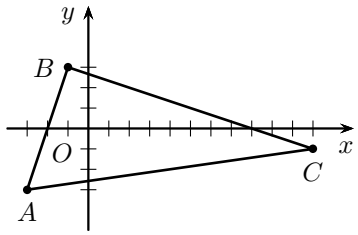


**Рис. 2.2**

Пример 2.1. Показать, что треугольник с вершинами $A(-3, -3)$, $B(-1, 3)$, $C(11, -1)$ (рис. 2.2) прямоугольный.

Р е ш е н и е. Найдем длины сторон треугольника:

$$AB = \sqrt{(-1+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40},$$
$$BC = \sqrt{(11+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{160},$$
$$AC = \sqrt{(11+3)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{200}.$$

Поскольку

$$AB^2 + BC^2 = 40 + 160 = 200 = AC^2,$$

то сумма квадратов длин двух сторон треугольника равна квадрату длины третьей стороны. По известному из школьного курса математики утверждению, обратному теореме Пифагора, это значит, что треугольник $ABC$ прямоугольный и сторона $AC$ — гипотенуза. □

Считают, что что точка $M$ делит отрезок $M_1M_2$ в отношении $\lambda > 0$, если $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$. Если точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ заданы своими координатами, то координаты точки $M(x, y)$ могут быть найдены по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{2.1}$$

В частности, при $\lambda = 1$ получаются формулы для координат *середины отрезка*:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{2.2}$$

Пример 2.2. Известны концы $A(2, -3)$ и $B(14, 3)$ отрезка $AB$. На этом отрезке находится точка $C$, расстояние от которой до $A$ в 2 раза больше расстояния до $B$ (рис. 2.3). Определить координаты точки $C$.

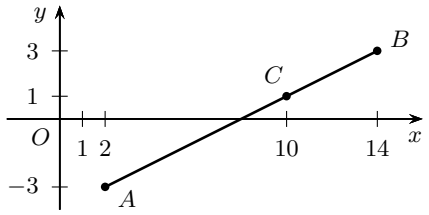


**Рис. 2.3**



Р е ш е н и е. Так как $AC = 2CB$, то $\lambda = \frac{AC}{CB} = 2$. По формуле (2.1)

$$x = \frac{2 + 2\cdot 14}{1+2} = 10, \quad y = \frac{-3 + 2\cdot 3}{1+2} = 1,$$

поэтому $C = (10, 1)$. □

*Площадь $S$ треугольника $ABC$* с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|. \tag{2.3}$$

Пример 2.3. Найти площадь треугольника $ABC$ с вершинами в точках $A(-2, -4)$, $B(2, 8)$, $C(10, 2)$.

Р е ш е н и е. По формуле (2.3)

$$S = \frac{1}{2}\left|(2+2)(2+4) - (10+2)(8+4)\right| = \frac{1}{2}\left|24 - 144\right| = 60 \text{ кв.ед.}$$ □

### 2.1.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Любое уравнение с двумя неизвестными $x$ и $y$, связывающее координаты точек на плоскости, определяет некоторое множество (геометрическое место) точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Наоборот, для часто встречающихся множеств на плоскости можно указать уравнение, которому удовлетворяют точки этого множества и только они.

Например, окружность состоит из точек, равноудаленных от некоторой точки, называемой центром, и, таким образом, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = 1$.

В основе классической геометрии Евклида лежат понятия *точки* и *прямой*. Эти базовые понятия не могут быть определены через более простые понятия. Свойства точек и прямых выражаются специальной системой аксиом, из которых путем строгих математических рассуждений выводится вся теория. Введя на плоскости прямоугольную декартову систему координат, мы дали алгебраическое описание всех точек плоскости. Оказывается, координаты позволяют дать исчерпывающее алгебраическое описание и прямым.

Рассмотрим некоторую прямую, не перпендикулярную оси $Ox$.

**Определение 2.1.** Назовем *углом наклона данной прямой к оси* $Ox$ угол $\alpha$, на который нужно повернуть ось $Ox$ против хода часовой стрелки до совпадения с прямой.

**Определение 2.2.** Тангенс угла наклона прямой к оси $Ox$ называют *угловым коэффициентом этой прямой* и обозначают буквой $k$:

$$k = \operatorname{tg}\alpha.$$

Из определения углового коэффициента, в частности, следует, что если $\alpha = 0$, т.е. прямая параллельна оси $Ox$, то $k = 0$. Если $\alpha = \pi/2$, т.е. прямая перпендикулярна оси $Ox$, то выражение $k = \operatorname{tg}\alpha$ не имеет смысла. Тогда говорят, что угловой коэффициент «обращается в бесконечность».

Выведем уравнение прямой, если известны ее угловой коэффициент и величина отрезка $OB$, отсекаемого ею на оси $Oy$.

Пусть $M$ — произвольная точка плоскости с координатами $x$ и $y$. Если провести прямые $BN$ и $NM$, параллельные осям, то образуется прямоугольный треугольник (рис. 2.4).

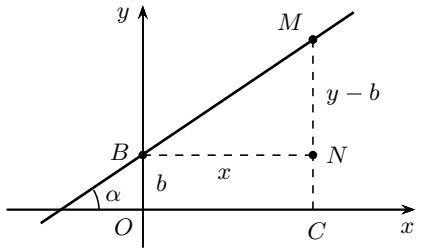


**Рис. 2.4**

Точка $M$ лежит на прямой тогда и только тогда, когда величины $BN$ и $NM$ удовлетворяют условию $\frac{NM}{BN} = \operatorname{tg}\alpha$. Но

$$NM = CM - CN = CM - OB = y - b, \quad BN = x.$$

Отсюда по определению углового коэффициента получаем, что точка $M$ лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $\frac{y-b}{x} = k$, которое после преобразования примет вид

$$y = kx + b. \tag{2.4}$$



**Определение 2.3.** Уравнение (2.4) называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Если $k = 0$, то прямая параллельна оси $Ox$. Ее уравнение имеет вид $y = b$.

Итак, любая прямая, не перпендикулярная оси $Ox$, имеет уравнение вида (2.4). Верно и обратное: любое уравнение вида (2.4) определяет прямую, которая имеет угловой коэффициент $k$ и отсекает на оси $Oy$ отрезок, величина которого равна $b$.

Пример 2.4. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси $Oy$ отрезок $b = 2$ и образующей с осью $Ox$ угол $\alpha = \pi/3$.

Р е ш е н и е. Находим угловой коэффициент:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Подставляя $k$ и $b$ в уравнение (2.4), получаем искомое уравнение прямой: $y = \sqrt{3}x + 2$, или $y - \sqrt{3}x - 2 = 0$. □

### 2.1.3. Составление уравнений прямых

Иногда возникает необходимость составить уравнение прямой, зная одну ее точку $M_1(x_1, y_1)$ и угловой коэффициент $k$. Запишем уравнение прямой в виде (2.4), где $b$ — пока неизвестное число. Так как прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (2.4): $y_1 = kx_1 + b$. Отсюда $b = y_1 - kx_1$.

Подставляя найденное значение $b$ в уравнение (2.4), получаем искомое уравнение прямой:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2.5}$$

Пример 2.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, 2)$ и образующей с осью $Ox$ угол $\alpha = \pi/4$.

Р е ш е н и е. Находим угловой коэффициент: $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Подставляя координаты точки $M$ и значение углового коэффициента $k$ в уравнение (2.5), получаем искомое уравнение прямой:

$$y - 2 = 1(x - 1), \quad y - x - 1 = 0.$$ □

Составим уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Приняв в уравнении (2.5) точку $M(x, y)$ за $M_2(x_2, y_2)$, получим: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Таким образом, если $x_2 \neq x_1$, то для прямой, проходящей через точки $M_1$ и $M_2$, угловой коэффициент

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.6}$$

Подставляя вычисленное значение $k$ в уравнение (2.5), получаем искомое уравнение прямой:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Это уравнение, если $y_2 \neq y_1$, можно записать в виде

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.7}$$

Если $y_1 = y_2$, то уравнение искомой прямой имеет вид $y = y_1$. Такая прямая параллельна оси $Ox$. Если $x_1 = x_2$, то прямая, проходящая через точки $M_1$ и $M_2$, параллельна оси $Oy$. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

### 2.1.4. Общее уравнение прямой

**Теорема 2.1.** *В прямоугольной системе координат любая прямая задается уравнением первой степени*

$$Ax + By + C = 0. \tag{2.8}$$

*И обратно, уравнение* (2.8) *при произвольных коэффициентах $A$, $B$, $C$ ($A$ и $B$ одновременно не равны нулю) определяет некоторую прямую в прямоугольной системе координат $Oxy$.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Если прямая не перпендикулярна оси $Ox$, то, как было показано в п. 2.1.2, она определяется уравнением первой степени $y = kx + b$, т.е. уравнением вида (2.8), где $A = k$, $B = -1$ и $C = b$. Если прямая перпендикулярна оси $Ox$, то все ее точки имеют одинаковые абсциссы, равные величине $a$ отрезка, отсекаемого прямой на оси $Ox$



(рис. 2.5). Уравнение такой прямой имеет вид $x = a$. Это частный случай уравнения (2.8), где $A = 1$, $B = 0$, $C = -a$. Первое утверждение доказано.

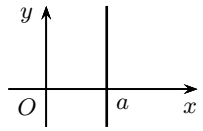


**Рис. 2.5**

Докажем обратное утверждение. Пусть дано уравнение (2.8), где хотя бы один из коэффициентов ($A$ или $B$) не равен нулю. Если $B \neq 0$, то это уравнение можно записать в виде

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Полагая $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, получаем уравнение $y = kx + b$, т.е. уравнение вида (2.4), которое определяет прямую. Если $B = 0$, то $A \neq 0$, и уравнение (2.8) принимает вид $x = -\frac{C}{A}$. Обозначив $a = -\frac{C}{A}$, получим $x = a$, т.е. уравнение прямой, перпендикулярной оси $Ox$. □

Так как все прямые и только они задаются уравнениями первого порядка, то естественно называть их *линиями* (*кривыми*) *первого порядка*.

**Определение 2.4.** Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ называется *общим уравнением прямой* или *полным уравнением прямой*. При различных значениях $A$, $B$, $C$ оно определяет всевозможные прямые.

Рассмотрим три частных случая, когда уравнение $Ax+By+C = 0$ является *неполным*, т.е. один из коэффициентов равен нулю:

1) $C = 0$; уравнение имеет вид $Ax + By = 0$ и определяет прямую, проходящую через начало координат;
2) $B = 0$ ($A \neq 0$); уравнение имеет вид $Ax + C = 0$ и определяет прямую, параллельную оси $Oy$. В частности, уравнение $x = 0$ определяет ось ординат;
3) $A = 0$ ($B \neq 0$); уравнение имеет вид $By + C = 0$ и определяет прямую, параллельную оси $Ox$. В частности, уравнение $y = 0$ определяет ось абсцисс.

### 2.1.5. Уравнение прямой «в отрезках»

Рассмотрим теперь уравнение $Ax + By + C = 0$ при условии, что ни один из коэффициентов $A$, $B$, $C$ не равен нулю. Преобразуем его к виду

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Введя обозначения $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{2.9}$$

**Определение 2.5.** Уравнение (2.9) называется *уравнением прямой «в отрезках»*.

Числа $a$ и $b$ являются длинами отрезков, которые прямая отсекает на осях координат.

Пример 2.6. Прямая задана уравнением $2x - 3y + 6 = 0$. Составить для этой прямой уравнение «в отрезках» и построить прямую.

Р е ш е н и е. Для данной прямой уравнение «в отрезках» имеет вид

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1.$$

Чтобы построить эту прямую, отложим на осях координат $Ox$ и $Oy$ отрезки $OM_1$ величиной $a = -3$ и $OM_2$ величиной $b = 2$ и проведем прямую через точки $M_1$ и $M_2$ (рис. 2.6). □

*Замечание* 2.1. Рассмотренный пример показывает, что уравнение прямой в отрезках удобно использовать для геометрического построения прямой.

### 2.1.6. Угол между двумя прямыми

**Определение 2.6.** *Углом между прямыми* $L_1$ и $L_2$ называется угол, на который надо повернуть прямую $L_1$ против хода часовой стрелки до ее совпадения с прямой $L_2$. Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.



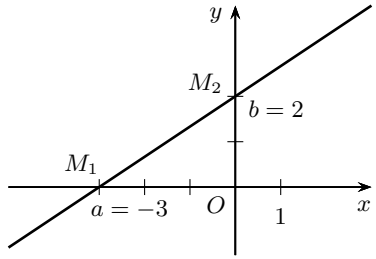


**Рис. 2.6**

Рассмотрим две прямые: $L_1$ и $L_2$. Пусть уравнение прямой $L_1$ имеет вид $y = k_1x + b_1$, где $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, а уравнение прямой $L_2$ — вид $y = k_2x + b_2$, где $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, $\varphi$ — угол между $L_1$ и $L_2$, $0 \leqslant \varphi < \pi$ (рис. 2.7).

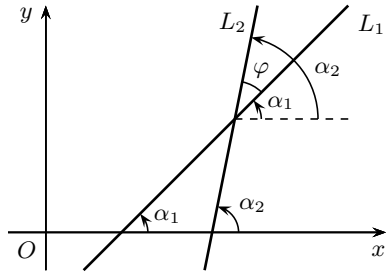


**Рис. 2.7**

Из геометрических соображений устанавливаем соотношение, связывающее углы $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\varphi$:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi, \quad \varphi = \alpha_2 - \alpha_1,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{2.10}$$

Пример 2.7. Прямые заданы уравнениями

$$y = 3x + 2, \quad y = -2x + 3.$$

Найти угол между этими прямыми.

Р е ш е н и е. Имеем: $k_1 = 3$, $k_2 = -2$. По формуле (2.10)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2-3}{1+(-2)\cdot 3} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Таким образом, угол между данными прямыми равен $\pi/4$. □

### 2.1.7. Условия параллельности и перпендикулярности

Прямые $L_1$ и $L_2$ параллельны, когда угол между ними $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = 0$. Это верно, если числитель правой части формулы (2.10) равен нулю, т.е. $k_2 - k_1 = 0$, откуда

$$k_1 = k_2. \tag{2.11}$$

Равенство угловых коэффициентов (2.11) называется *условием параллельности двух прямых*.

Прямые $L_1$ и $L_2$ перпендикулярны, когда $\varphi = \pi/2$ и $\operatorname{ctg}\varphi = 0$. Из формулы (2.10) находим:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}.$$

Значит, равенство $\operatorname{ctg}\varphi = 0$ выполняется, если $1 + k_1 k_2 = 0$, откуда

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{2.12}$$

Равенство (2.12) называется *условием перпендикулярности двух прямых*, которое состоит в том, что угловые коэффициенты прямых обратны по величине и противоположны по знаку.

Пример 2.8. Показать, что прямые $2x-3y+1 = 0$ и $6x-9y+2 = 0$ параллельны.



Р е ш е н и е. Приведем каждое из уравнений к виду уравнения с угловым коэффициентом:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}.$$

Угловые коэффициенты данных прямых равны: $k_1 = k_2 = 2/3$. Значит, прямые параллельны. □

### 2.1.8. Расстояние от точки до прямой

*Расстоянием от точки до прямой* будем, как всегда, называть длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

**Теорема 2.2.** *Расстояние $d$ от данной точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $L$, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$, на плоскости определяется формулой*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.13}$$

Пример 2.9. Пусть прямая $L$ задана уравнением $2x - 3y + 5 = 0$ и дана точка $M(1, 2)$. Найти расстояние $d$ от точки $M$ до прямой $L$.

Р е ш е н и е. По формуле (2.13) получаем:

$$d = \frac{|2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$ □

### 2.1.9. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Пусть прямые $L_1$ и $L_2$ заданы следующими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad (L_1), \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \quad (L_2). \end{cases} \tag{2.14}$$

Все возможные взаимные расположения этих прямых могут быть описаны следующим образом:

1) если $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, то прямые пересекаются и их точка пересечения может быть получена как решение системы (2.14);
2) если $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, то
   а) при $A_1C_2 - A_2C_1 = 0$ и $B_1C_2 - B_2C_1 = 0$ прямые совпадают, т.е. оба уравнения (2.14) задают одну и ту же прямую;
   б) при $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$ либо $B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$ прямые параллельны и различны.

Итак, две прямые на плоскости либо пересекаются в одной точке, либо совпадают, либо параллельны.

## 2.2. Кривые второго порядка

### 2.2.1. Окружность

**Определение 2.7.** *Окружность* — это множество точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии $r > 0$, называемом *радиусом окружности*, от точки $C(x_0, y_0)$ — *центра* (рис. 2.8).

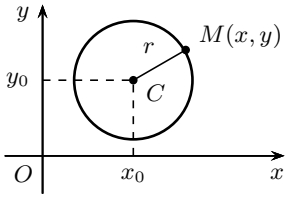


**Рис. 2.8**

Согласно формуле (1.21) для расстояния между двумя точками уравнение окружности может быть представлено в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \tag{2.15}$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение (2.15) принимает вид

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



Пример 2.10. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ задает окружность. Найти ее центр и радиус.

Р е ш е н и е. Сгруппируем все члены уравнения, содержащие $x$, а затем члены, содержащие $y$:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) = 4.$$

Дополним выражения в скобках до полных квадратов:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 = 4, \quad (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2.$$

Мы преобразовали исходное уравнение к виду (2.15), где $x_0 = 2$, $y_0 = -1$ и $r = 3$. Следовательно, это уравнение задает окружность, центр которой находится в точке $(2, -1)$, а радиус равен 3. □

### 2.2.2. Эллипс

**Определение 2.8.** *Эллипс* (рис. 2.9) — это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0, \tag{2.16}$$

называемому *каноническим уравнением эллипса.*

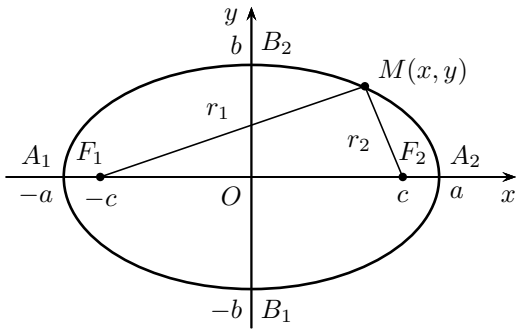


**Рис. 2.9**

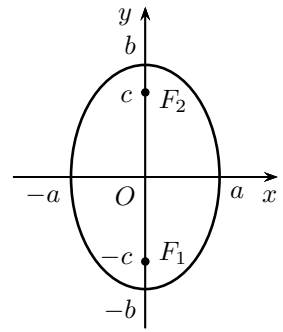


**Рис. 2.10**

Из определения следует, что эллипс:

1) симметричен относительно осей координат и начала координат;

2) целиком лежит внутри прямоугольника $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$.

Выполним построение эллипса. Для первой четверти, где координаты $x, y \geqslant 0$, выразим явно переменную $y$ через $x$:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \quad y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2, \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Используя последнее уравнение, построим эллипс в первой четверти. Затем, симметрично отображая построенный фрагмент относительно осей и центра координат, получаем весь эллипс (рис. 2.9).

**Определение 2.9.** Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ (рис. 2.9), принадлежащие эллипсу, называются *вершинами эллипса*.

**Определение 2.10.** Начало координат $O(0, 0)$ (рис. 2.9), играющее роль центра симметрии эллипса, называют *центром эллипса*.

**Определение 2.11.** Отрезки $A_1A_2$ и $B_1B_2$ (рис. 2.9), а также их длины $2a$ и $2b$ называют соответственно *большой* и *малой осями эллипса*.

**Определение 2.12.** Отрезки $OA_2$ и $OB_2$ (рис. 2.9), представляющие собой половины большой и малой осей, и их длины $a$ и $b$ называют соответственно *большой* и *малой полуосями эллипса*.

Далее для определенности будем считать, что $a \geqslant b$.

**Определение 2.13.** Положим

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

Так как $a \geqslant b > 0$, то $0 \leqslant c < a$. Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (рис. 2.9) называют *фокусами эллипса*.

Если $a < b$, то уравнение (2.16) задает эллипс, большая полуось которого равна $b$ и лежит на оси $Oy$, а малая равна $a$ и лежит на оси $Ox$. Фокусы такого эллипса расположены в точках $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$, где $c^2 = b^2 - a^2$ (рис. 2.10).



**Определение 2.14.** Расстояния $r_1$ и $r_2$ (см. рис. 2.9) от точки $M$ эллипса до его фокусов $F_1$ и $F_2$ называются соответственно *левым* и *правым фокальными радиусами этой точки*.

**Теорема 2.3.** *Точка $M$ плоскости принадлежит эллипсу* (2.16) *тогда и только тогда, когда сумма ее фокальных радиусов равна* $2a$*:*

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{2.17}$$

Доказательство. Для обоснования *необходимости* докажем, что если точка $M$ принадлежит эллипсу, то сумма ее фокальных радиусов равна $2a$.

Из рис. 2.9 видно что фокальные радиусы могут быть вычислены по формулам:

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \tag{2.18}$$

Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2.16), откуда

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \qquad y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = (a^2 - c^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Значит,

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x + c)^2 + (a^2 - c^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \\ &= \sqrt{\left(x^2 + 2cx + c^2\right) + \left(a^2 - x^2 - c^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2\right)} = \\ &= \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления дают соотношение для $r_2$:

$$r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|.$$

Так как $|x| \leqslant a$ и $0 < c < a$, то $|\frac{c}{a}x| \leqslant a$. Следовательно, выражения под знаками модуля неотрицательны. Тогда

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x. \tag{2.19}$$

Складывая $r_1$ и $r_2$, убеждаемся в справедливости равенства (2.17).

Для доказательства *достаточности* убедимся, что всякая точка $M$, сумма фокальных радиусов которой равна $2a$, принадлежит эллипсу.

В самом деле, согласно формулам (2.18),

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возведем левую и правую части в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Последнее равенство снова возведем в квадрат:

$$a^2\Big((x-c)^2+y^2\Big)=(a^2-cx)^2,$$
$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Поскольку $c^2=a^2-b^2$, то $a^2-c^2=b^2$, и преобразуемое равенство принимает вид

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Деля его левую и правую части на $a^2b^2$, приходим к каноническому уравнению эллипса (2.16). Таким образом, точка $M$ принадлежит эллипсу. □

*Замечание* 2.2. Утверждение теоремы 2.3 может использоваться в качестве определения эллипса.

**Определение 2.15.** Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется *эксцентриситетом*

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Так как $0\leqslant c<a$, то $0\leqslant\varepsilon<1$. Если, в частности, $a=b$, то $c=0$ и $\varepsilon=0$. В этом случае фокусы сливаются в одной точке — центре и эллипс деформируется в окружность, заданную уравнением $x^2+y^2=a^2$. По мере возрастания эксцентриситета от нуля до единицы увеличивается «сплющенность» эллипса.



Из равенств (2.19) и определения эксцентриситета следует, что фокальные радиусы любой точки $M(x,y)$ эллипса могут быть найдены по формулам:

$$r_1=a+\varepsilon x,\quad r_2=a-\varepsilon x.$$

Пример 2.11. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M\big(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{6}}{4}\big)$ и $N\big(-2,\frac{\sqrt{15}}{5}\big)$.

Р е ш е н и е. Подставляя координаты точек $M$ и $N$ в каноническое уравнение (2.16), получаем систему уравнений для нахождения полуосей $a$ и $b$:

$$\begin{cases}\dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}{b^2}=1,\\[2mm] \dfrac{(-2)^2}{a^2}+\dfrac{\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2}{b^2}=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{25}{4a^2}+\dfrac{3}{8b^2}=1,\\[2mm] \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{3}{5b^2}=1.\end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения системы на 8, а второго — на 5; затем вычтем второе уравнение из первого:

$$\begin{cases}\dfrac{50}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=8,\\[2mm] \dfrac{20}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=5,\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{30}{a^2}=3,\\[2mm] \dfrac{20}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=5.\end{cases}$$

Отсюда находим:

$$a^2=10,\quad \frac{3}{b^2}=5-\frac{20}{a^2}=5-\frac{20}{10}=3,\quad b^2=1.$$

Итак, искомое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{10}+y^2=1$. □

## 2.2.3. Гипербола

**Определение 2.16.** *Гипербола* (рис. 2.11) — это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad a,b>0,\tag{2.20}$$

называемому *каноническим уравнением гиперболы*.

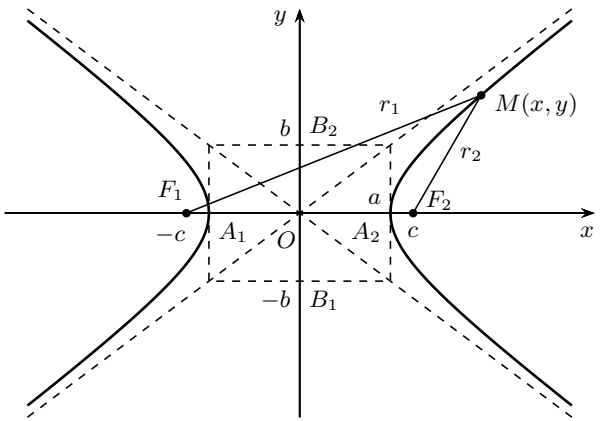


**Рис. 2.11**

Из канонического уравнения (2.20) следует, что гипербола:

1) симметрична относительно осей координат и начала координат;
2) не пересекает ось $Oy$;
3) лежит за пределами полосы $|x| < a$;
4) состоит из двух *ветвей*: левой для $x \leqslant -a$ и правой для $x \geqslant a$.

Построим гиперболу. Получим зависимость переменной $y$ от $x$ в первой четверти:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1, \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2, \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Теперь выполним построение в первой четверти и симметрично отобразим полученный фрагмент на всю систему координат (рис. 2.11).

**Определение 2.17.** Точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ (рис. 2.11) лежат на гиперболе и называются *вершинами гиперболы*.

**Определение 2.18.** Начало координат $O(0, 0)$ (рис. 2.11), выступающее в роли центра симметрии гиперболы, называют *центром гиперболы*.



**Определение 2.19.** Отрезки $A_1A_2$ и $B_1B_2$, где $B_1 = (0, -b)$ и $B_2 = (0, b)$ (рис. 2.11), а также их длины $2a$ и $2b$ называют соответственно *действительной* и *мнимой осями гиперболы*.

**Определение 2.20.** Отрезки $OA_2$ и $OB_2$ (рис. 2.11), представляющие собой половины действительной и мнимой осей, и их длины $a$ и $b$ называют соответственно *действительной* и *мнимой полуосями гиперболы*.

**Определение 2.21.** Положим

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (рис. 2.11) называются *фокусами гиперболы*.

Ясно, что $a < c$, т.е. расстояние между фокусами больше действительной оси гиперболы.

**Определение 2.22.** Расстояния $r_1$ и $r_2$ (рис. 2.11) от точки $M$ гиперболы до ее фокусов $F_1$ и $F_2$ называются соответственно *левым* и *правым фокальными радиусами этой точки*.

**Определение 2.23.** Прямоугольник, образованный прямыми $x = -a$, $x = a$, $y = -b$ и $y = b$ (рис. 2.11), называется *основным прямоугольником гиперболы*.

**Определение 2.24.** Две прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ (рис. 2.11) называются *асимптотами гиперболы*.

*Замечание* 2.3. При удалении от начала координат гипербола как угодно близко подходит к своим асимптотам, не пересекая их. Построение гиперболы удобно начинать с изображения основного прямоугольника. Далее проводят асимптоты, которые являются диагоналями основного прямоугольника. После этого вычерчивание гиперболы не составляет труда (рис. 2.11).

**Теорема 2.4.** *Точка $M$ плоскости принадлежит гиперболе* (2.20) *тогда и только тогда, когда абсолютная величина разности фокальных радиусов этой точки равна* $2a$*:*

$$|r_1 - r_2| = 2a. \tag{2.21}$$

Доказательство. *Необходимость.* Убедимся, что для всякой точки $M$ гиперболы абсолютная величина разности фокальных радиусов равна $2a$.

Из рис. 2.11 видно, что фокальные радиусы гиперболы могут быть вычислены по формулам:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{2.22}$$

Если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2.20), откуда получаем:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1, \qquad y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = (c^2 - a^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

Вычисление $r_1$ проводим тем же способом, что и при доказательстве теоремы 2.3:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + (c^2-a^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \\ &= \sqrt{\left(x^2 + 2cx + c^2\right) + \left(\frac{c^2}{a^2}x^2 - c^2 - x^2 + a^2\right)} = \\ &= \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|. \end{aligned}$$

Аналогично находим:

$$r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|.$$

Так как для гиперболы $|x| \geqslant a$ и $c > a$, то $|\frac{c}{a}x| > a$. Значит, при раскрытии модулей надо смотреть знак выражения $\frac{c}{a}x$, определяемый знаком аргумента $x$. Имеем два случая:

1) для правой ветви гиперболы $x \geqslant a$, поэтому

$$r_1 = \frac{c}{a}x + a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x - a, \qquad r_1 - r_2 = 2a; \tag{2.23}$$

2) для левой ветви $x \leqslant -a$, поэтому

$$r_1 = -\frac{c}{a}x - a, \quad r_2 = -\frac{c}{a}x + a, \qquad r_2 - r_1 = 2a. \tag{2.24}$$



В каждом из указанных случаев верно доказываемое равенство (2.21).

*Достаточность.* Покажем, что всякая точка $M$, абсолютная величина разности фокальных радиусов которой равна $2a$, принадлежит гиперболе. В этих условиях, согласно формулам (2.22),

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Как и при доказательстве теоремы 2.3, возведем левую и правую части в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$
$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Последнее равенство снова возведем в квадрат:

$$a^2\Big((x-c)^2 + y^2\Big) = (cx - a^2)^2,$$
$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4,$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

В данном случае $c^2 = a^2 + b^2$. После замены $a^2 - c^2 = -b^2$ будем иметь:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Деля левую и правую части полученного уравнения на $-a^2b^2$, приходим к каноническому уравнению гиперболы (2.20). Этим доказано, что точка $M$ принадлежит гиперболе. □

*Замечание* 2.4. Утверждение теоремы 2.4 может быть использовано в качестве определения гиперболы.

**Определение 2.25.** *Эксцентриситетом гиперболы* называется число

$$\varepsilon = \frac{c}{a},$$

характеризующее ее форму. Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

Понятие эксцентриситета позволяет переписать формулы (2.23) и (2.24) для фокальных радиусов точки $M$, лежащей соответственно на правой и левой ветвях гиперболы, следующим образом:

1) $r_1 = \varepsilon x + a$, $r_2 = \varepsilon x - a$ для правой ветви;

2) $r_1 = -\varepsilon x - a$, $r_2 = -\varepsilon x + a$ для левой ветви.

**Определение 2.26.** Если $a = b$, т.е. действительная и мнимая полуоси равны, то уравнение гиперболы принимает вид $x^2 - y^2 = a^2$. Такая гипербола называется *равнобочной*. Ее асимптоты образуют прямой угол и являются биссектрисами координатных углов.

**Определение 2.27.** Уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \tag{2.25}$$

задает гиперболу, действительной и мнимой осями которой служат соответственно мнимая и действительная оси гиперболы (2.20). Гиперболы (2.20) и (2.25) имеют общие полуоси, асимптоты и основной прямоугольник и называются *сопряженными*.

На рис. 2.12 сопряженная гипербола изображена штриховой линией, ее фокусы обозначены $F_1'$ и $F_2'$.

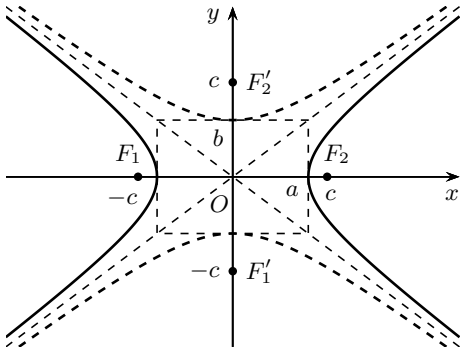


**Рис. 2.12**



Пример 2.12. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$ и имеющей эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Р е ш е н и е. Согласно определению эксцентриситета

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{2}, \quad c = \sqrt{2}a, \quad c^2 = 2a^2.$$

Так как для всякой гиперболы верно равенство $c^2 = a^2 + b^2$, то в нашем случае $b^2 = c^2 - a^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$, т.е. гипербола равнобочная.

Подставим координаты данной по условию точки $M$ в каноническое уравнение (2.20):

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{3}{a^2} - \frac{2}{a^2} = 1, \quad \frac{1}{a^2} = 1, \quad a^2 = 1.$$

Значит, уравнение искомой гиперболы имеет вид $x^2 - y^2 = 1$. □

## 2.2.4. Парабола

**Определение 2.28.** *Парабола* (рис. 2.13) — это геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px, \quad p > 0, \tag{2.26}$$

называемому *каноническим уравнением параболы*.

Из определения следует, что парабола:

1) симметрична относительно оси $Ox$;

2) лежит в правой полуплоскости, т.е. $x \geqslant 0$;

3) проходит через начало координат.

Уравнение $y^2 = -2px$ задает параболу, симметричную параболе (2.26) относительно оси ординат. Уравнения $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$ определяют «повернутые» параболы, чья ось симметрии совпадает с осью ординат (рис. 2.14).

**Определение 2.29.** Ось абсцисс, которая является осью симметрии параболы, называется *осью параболы*.

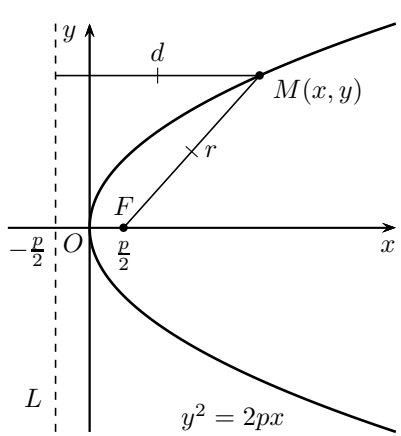


**Рис. 2.13**

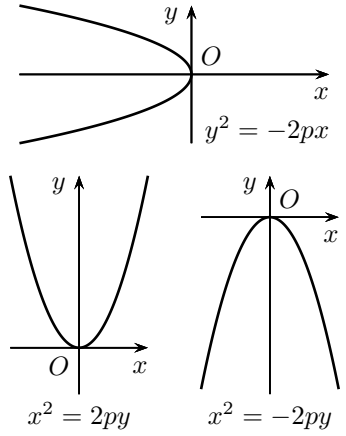


**Рис. 2.14**

**Определение 2.30.** Начало координат $O(0,0)$ называется *вершиной параболы*.

**Определение 2.31.** Точка $F(\frac{p}{2},0)$ (см. рис. 2.13) называется *фокусом параболы*.

**Определение 2.32.** Прямая $L$, задаваемая уравнением $x=-\frac{p}{2}$ (см. рис. 2.13), называется *директрисой параболы*.

**Определение 2.33.** Расстояние от фокуса до директрисы, равное $p$, называется *параметром параболы*.

**Определение 2.34.** Для любой точки $M(x,y)$ параболы отрезок $r=MF$ (см. рис. 2.13) называется *фокальным радиусом параболы*.

**Теорема 2.5.** *Точка $M$ плоскости принадлежит параболе тогда и только тогда, когда эта точка равноудалена от фокуса $F$ и директрисы $L$.*

Доказательство. Отметим, что для всякой точки $M(x,y)$ плоскости фокальный радиус $r$ и расстояние до директрисы $d$ (см. рис. 2.13) вычисляются по формулам:

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\quad d=\left|x+\frac{p}{2}\right|. \tag{2.27}$$



*Необходимость.* Докажем, что для всякой точки параболы $M$ фокальный радиус $r$ равен расстоянию до директрисы $d$.

Если точка $M(x,y)$ принадлежит параболе, то координаты $x$ и $y$ удовлетворяют каноническому уравнению (2.26). Тогда, согласно (2.27),

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+2px}=\sqrt{\left(x^2-px+\frac{p^2}{4}\right)+2px}=$$
$$=\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|=d.$$

*Достаточность.* Предположим, что точка $M$ равноудалена от фокуса и директрисы, и докажем, что эта точка принадлежит параболе.

В соответствии с предположением для точки $M(x,y)$ имеет место равенство $r=d$. Согласно формулам (2.27) это означает, что

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Преобразуем это уравнение, возведя обе его части в квадрат:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,\quad y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2.$$

Применив к правой части последнего равенства формулу разности квадратов, получим уравнение $y^2=2px$, которое представляет собой каноническое уравнение параболы (2.26). □

*Замечание* 2.5. Утверждение теоремы 2.5 может использоваться в качестве определения параболы.

Так как для точек $M(x,y)$ параболы (2.26) $x\geqslant 0$, то из теоремы 2.5 следует, что фокальный радиус таких точек

$$r=d=\left|x+\frac{p}{2}\right|=x+\frac{p}{2}.$$

Пример 2.13. Составить уравнение симметричной относительно оси $Ox$ параболы с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси $Ox$, равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 4.

Р е ш е н и е. Из условия следует, что точка $M(4,8)$ лежит на параболе (рис. 2.15). Подставим координаты $M$ в каноническое уравнение параболы (2.26): $8^2 = 2p \cdot 4$, $2p = 64/4 = 16$.

Зная параметр, выписываем искомое уравнение: $y^2 = 16x$. □

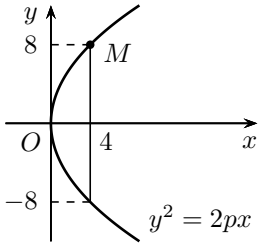


**Рис. 2.15**

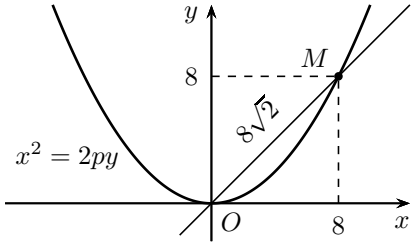


**Рис. 2.16**

Пример 2.14. Составить уравнение симметричной относительно оси $Oy$ параболы с вершиной в начале координат, если известно, что эта парабола отсекает на биссектрисе первого и третьего координатных углов хорду длиной $8\sqrt{2}$.

Р е ш е н и е. Из условия следует, что на параболе лежит точка $M(8,8)$ (рис. 2.16). Подставляем координаты точки $M$ в каноническое уравнение $x^2 = 2py$ данной параболы: $8^2 = 2p \cdot 8$, $2p = 8$.

Итак, искомое уравнение имеет вид $x^2 = 8y$. □

### 2.2.5. Кривые второго порядка со смещенным центром

Центр эллипса и гиперболы, а также вершина параболы могут быть помещены в любую точку $C(x_0, y_0)$ плоскости. При этом канонические уравнения соответствующих кривых преобразуются к следующему виду:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$
$$(y-y_0)^2 = 2p\,(x-x_0)\,.$$



Например, эллипс с центром в точке $C(3,2)$ и полуосями $a = 2$ и $b = 1$ (рис. 2.17) имеет уравнение

$$\frac{(x-3)^2}{4} + (y-2)^2 = 1.$$

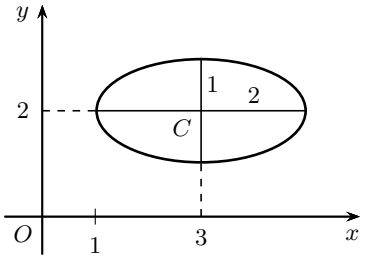


**Рис. 2.17**

Пример 2.15. Установить вид линии второго порядка, заданной уравнением $9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0$.

Р е ш е н и е. Выделим в данном уравнении полные квадраты по каждой из переменных:

$$9(x^2 + 2x + 1) - 9 - 4(y^2 - 2y + 1) + 4 - 31 = 0,$$
$$9(x+1)^2 - 4(y-1)^2 = 36, \quad \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Мы получили каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $C(-1,1)$ и полуосями $a = 2$ и $b = 3$. □

Пример 2.16. Установить вид линии второго порядка, заданной уравнением $x^2 - 4x - 4y = 0$.

Р е ш е н и е. Выделим в заданном уравнении полный квадрат по переменной $x$:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 - 4y = 0, \quad (x-2)^2 = 4y + 4, \quad (x-2)^2 = 4(y+1).$$

Мы получили каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $C(2,-1)$ и параметром $p = 2$. □

# Глава 3

# Предел последовательности и функции

## 3.1. Числовая последовательность

### 3.1.1. Понятие числовой последовательности

**Определение 3.1.** Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Если каждому натуральному числу $n$ поставлено в соответствие некоторое число $x_n$, то говорят, что определена *числовая последовательность*. Числа $x_n$, $n \in \mathbb{N}$, называют *элементами* или *членами последовательности*. Для числовой последовательности мы будем использовать следующие обозначения:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \quad \{x_n\}, \quad x_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Последовательности встречались в средней школе. Например, *бесконечная геометрическая прогрессия* $1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots,\ |q| < 1$, является числовой последовательностью.

**Определение 3.2.** Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$ называются соответственно *суммой, разностью, произведением* и *частным* двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (для частного $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$).

**Определение 3.3.** Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant M$. В противном случае она называется *неограниченной*.



Переформулируем это определение на языке кванторов. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leqslant M.$$

Ясно, что последовательность является неограниченной, если для любого $M > 0$ найдется такое число $n \in \mathbb{N}$, для которого $|x_n| > M$. На языке кванторов это можно записать следующим образом:

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \quad |x_n| > M.$$

**Определение 3.4.** *Окрестностью точки* называется любой интервал, содержащий эту точку; *$\varepsilon$-окрестностью точки $x = a$* называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

*Геометрической смысл ограниченной последовательности* состоит в том, что все члены последовательности находятся в некоторой окрестности ($M$-окрестности) точки $x = 0$ (рис. 3.1).

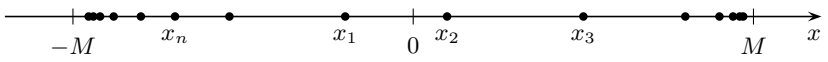


**Рис. 3.1**

Пример 3.1. Последовательность

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \ldots$$

ограничена, так как для всякого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $|x_n| = \dfrac{1}{n} \leqslant 1$.

Пример 3.2. Последовательность

$$x_n = \begin{cases} n, & \text{если } n \text{ нечетное}, \\ 1/n, & \text{если } n \text{ четное}, \end{cases}$$

является неограниченной: ее элементы могут принимать значения, бóльшие любого наперед заданного числа $M > 0$.

**Определение 3.5.** Последовательность $x_n$ называется *постоянной*, если

$$\exists\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad x_n = a,$$

т.е. все элементы последовательности равны некоторому числу $a$.

Например, последовательность $1, 1, \ldots, 1, \ldots$ является постоянной. Здесь для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $x_n = 1$.

### 3.1.2. Предел последовательности

Изучение предела последовательности начнем с примера.

Пример 3.3. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{n-1}{n}.$$

Из рис. 3.2, где изображены первые несколько элементов данной последовательности, видно, что они приближаются к значению $a = 1$. Для первых пяти элементов оценим степень этой близости:

$$|x_1 - 1| = 1, \quad |x_2 - 1| = \frac{1}{2}, \quad |x_3 - 1| = \frac{1}{3}, \quad |x_4 - 1| = \frac{1}{4}, \quad |x_5 - 1| = \frac{1}{5}.$$

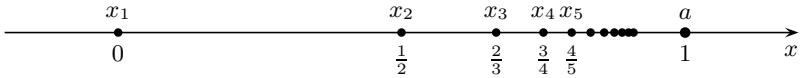


**Рис. 3.2**

Итак, видно, что по мере возрастания номера $n$ элемент последовательности $\{x_n\}$ неограниченно приближается к единице. В таком случае говорят, что число 1 является пределом последовательности $\{x_n\}$.

Получив наглядное представление о сути предельного перехода, можно перейти к математически строгому определению.

**Определение 3.6.** Число $a$ называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$



такой, что для всех $n > N_\varepsilon$ имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. На языке кванторов это записывается так:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_\varepsilon \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Для обозначения предела используется выражение

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

На основании рис. 3.2 мы уже сделали вывод, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Этому факту можно дать и строгое математическое доказательство, пользуясь введенным ранее определением предела последовательности (сделайте это самостоятельно).

*Геометрический смысл предела последовательности* состоит в том, что в любой $\varepsilon$-окрестности точки $a$ находятся все члены последовательности начиная с некоторого номера $N_\varepsilon$, зависящего, вообще говоря, от $\varepsilon$ (рис. 3.3).

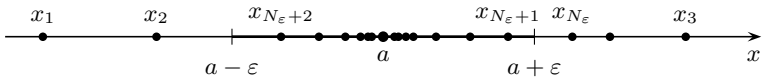


**Рис. 3.3**

Пример 3.4. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

Р е ш е н и е. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим модуль разности между $n$-м членом последовательности и числом $1/2$:

$$\left|\frac{n}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-(2n-1)}{2(2n-1)}\right| = \frac{1}{2(2n-1)}.$$

В соответствии с определением предела последовательности мы должны указать номер $N_\varepsilon$ такой, что для всякого $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2(2n-1)} < \varepsilon.$$

Для отыскания номера $N_\varepsilon$ решим это неравенство относительно $n$:

$$2(2n-1) > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon}+1\right).$$

Отсюда следует, что можно положить

$$N_\varepsilon = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon}+1\right)\right],$$

где запись $[x]$ означает целую часть числа $x$. □

### 3.1.3. Бесконечно малые последовательности

**Определение 3.7.** Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой* (БМП), если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

В соответствии с определением предела последовательности последовательность $x_n$ является бесконечно малой тогда и только тогда, когда для любого положительного числа $\varepsilon$ существует номер $N_\varepsilon$ такой, что для любого $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$, т.е.

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_\varepsilon \quad |x_n| < \varepsilon.$$

Пример 3.5. Последовательность $x_n = 1/n$ бесконечно малая, или, что то же самое, ее предел равен нулю.

*Геометрический смысл БМП* можно сформулировать так: для любой $\varepsilon$-окрестности точки $x = 0$ существует номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такой, что все члены последовательности начиная с $(N_\varepsilon+1)$-го принадлежат этой $\varepsilon$-окрестности (рис. 3.3, $a = 0$).

#### Свойства бесконечно малых последовательностей

**1.** *Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть БМП.*



Доказательство. Достаточно получить свойство для суммы двух БМП. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть БМП. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В соответствии с определением БМП для всякого положительного числа, в том числе и для $\varepsilon/2$, существуют номера $N_1$ и $N_2$ такие, что

$$\forall\, n > N_1 \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall\, n > N_2 \quad |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полагаем $N_\varepsilon = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для любого $n > N_\varepsilon$ будем иметь, что

$$|x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_\varepsilon \quad |x_n + y_n| < \varepsilon.$$

По определению это означает, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ есть БМП. □

**2.** *Бесконечно малая последовательность является ограниченной.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая. Докажем ее ограниченность. По определению БМП для всякого $\varepsilon > 0$, в том числе и для $\varepsilon = 1$, существует такой номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всякого $n > N_\varepsilon$ имеет место неравенство $|x_n| < 1$. Положим теперь

$$M = \max\Big\{1, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N_\varepsilon}|\Big\}.$$

Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ будет $|x_n| \leqslant M$. Это и означает, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. □

**3.** *Произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной последовательности есть БМП.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — соответственно бесконечно малая и ограниченная последовательности. Докажем, что последовательность $\{x_n y_n\}$ бесконечно малая. Для этого зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такое число $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всякого $n > N_\varepsilon$ будет $|x_n y_n| < \varepsilon$.

По определению ограниченной последовательности

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |y_n| \leqslant M.$$

По определению БМП для всякого положительного числа, в том числе и для $\varepsilon/M$, существует такой номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всякого $n > N_\varepsilon$ верно неравенство $|x_n| < \varepsilon/M$. Но тогда при $n > N_\varepsilon$ будет также верна оценка

$$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M}\, M = \varepsilon,$$

доказывающая свойство. □

**4.** *Произведение конечного числа БМП есть БМП.*

Доказательство. Справедливость этого свойства следует из того, что всякая БМП является ограниченной последовательностью, а произведение ограниченной последовательности на БМП есть БМП. □

**5.** *Если БМП $\{x_n\}$ имеет постоянное значение $a$, т.е. для любого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $x_n = a$, то $a = 0$.*

Доказательство. Из определения БМП следует, что каким бы малым мы ни выбрали число $\varepsilon > 0$, имеет место неравенство $|a| < \varepsilon$. А это возможно только в том случае, когда $a = 0$. □

### 3.1.4. Бесконечно большие последовательности

**Определение 3.8.** Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой* (ББП), если для всякого $A > 0$ существует номер $N_A \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $n > N_A$ верно неравенство $|x_n| > A$, т.е.

$$\forall\, A > 0 \quad \exists\, N_A \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_A \quad |x_n| > A.$$

В таком случае пишут:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Если дополнительно известно, что последовательность $\{x_n\}$ для достаточно больших $n$ сохраняет знак, т.е.

$$\forall\, A > 0 \quad \exists\, N_A \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_A \quad x_n > A \quad \Big(x_n < -A\Big),$$

то к символу бесконечности «$\infty$» добавляют соответствующий знак:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \Big(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\Big).$$



Примерами бесконечно больших являются последовательности

$$x_n = \ln n, \quad x_n = -\sqrt{n}, \quad x_n = (-2)^n.$$

**Свойства бесконечно больших последовательностей**

**1.** *ББП — неограниченная последовательность.*

*Замечание* 3.1. Обратное, вообще говоря, не верно. Неограниченная последовательность может не быть ББП, в чем убеждает пример 3.2.

**2.** *Произведение двух ББП есть ББП.*

**3.** *Сумма ББП и ограниченной последовательности есть ББП.*

**4.** *ББП не может являться постоянной последовательностью.*

*Замечание* 3.2. Сумма двух ББП не обязательно является ББП. Например, последовательности $x_n = n$ и $y_n = -n$ бесконечно большие. Однако сумма $x_n + y_n = 0$ бесконечно большой не является.

Следующая теорема иллюстрирует связь между БМП и ББП.

**Теорема 3.1.** *Если последовательность $\{x_n\}$ есть ББП и все ее члены отличны от нуля, то $\{1/x_n\}$ есть БМП; и обратно, если $\{x_n\}$ — БМП, все члены которой отличны от нуля, то $\{1/x_n\}$ — ББП.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ББП, все члены которой отличны от нуля. Докажем, что последовательность $\{1/x_n\}$ есть БМП. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению ББП для всякого $A > 0$, в том числе для $A = 1/\varepsilon$,

$$\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_\varepsilon \quad |x_n| > A = \frac{1}{\varepsilon}.$$

В этих условиях $|1/x_n| < 1/A = \varepsilon$.

Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ мы смогли подобрать такой номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что при $n > N_\varepsilon$ верно неравенство $|1/x_n| < \varepsilon$. В соответствии с определением это и означает, что последовательность $\{1/x_n\}$ бесконечно малая.

Пусть теперь $\{x_n\}$ — БМП, все члены которой отличны от нуля. Зафиксируем $A > 0$. По определению БМП для всякого $\varepsilon > 0$, в том числе для $\varepsilon = 1/A$,

$$\exists\, N_A \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_A \quad |x_n| < \varepsilon = \frac{1}{A}.$$

В этих условиях $|1/x_n| > 1/\varepsilon = A$. Таким образом, последовательность $\{1/x_n\}$ бесконечно большая. □

### 3.1.5. Сходящиеся последовательности

**Определение 3.9.** Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а последовательность, не имеющая предела, — *расходящейся*. Если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к $a$.

Простейшим примером сходящейся последовательности является БМП, а расходящейся — ББП.

Пример 3.6. Последовательность $x_n = (-1)^n$ расходится.

Решение. Выберем произвольное число $a$ и покажем, что оно не может быть пределом данной последовательности. Положим $\varepsilon = 1/2$. Тогда в $\varepsilon$-окрестность точки $a$ не войдет хотя бы одно из чисел 1 и $-1$. Следовательно, за пределами этой окрестности будут лежать элементы данной последовательности со сколь угодно большими номерами. Доказываемое утверждение следует теперь из геометрического смысла предела последовательности. □

#### Свойства сходящихся последовательностей

**1.** *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела своим пределом число $a$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{x_n - a\}$ была БМП.*

Доказательство. *Необходимость.* Если $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_\varepsilon \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$



Это означает, что последовательность $\{x_n - a\}$ есть БМП.

*Достаточность.* Пусть последовательность $\{x_n - a\}$ есть БМП. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_\varepsilon \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к $a$. □

**2.** *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad a \neq b.$$

Тогда последовательности $\{x_n - a\}$ и $\{x_n - b\}$ есть БМП. Введем обозначения: $x_n - a = \alpha_n$, $x_n - b = \beta_n$. Последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — БМП. Имеем: $x_n = a + \alpha_n$, $x_n = b + \beta_n$. Отсюда получим, что $a + \alpha_n = b + \beta_n$ и $a - b = \beta_n - \alpha_n$. Так как $\{\beta_n - \alpha_n\}$ есть БМП, то в соответствии со свойством 5 БМП имеем $b - a = 0$, т.е. $b = a$. □

**3.** *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Действительно, сходящаяся к $a$ последовательность $\{x_n\}$ представима в виде $x_n = a + \alpha_n$, где $\alpha_n$ — БМП. По свойству 2 ограниченности БМП

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |\alpha_n| \leqslant M.$$

В этих условиях

$$|x_n| = |a + \alpha_n| \leqslant |a| + |\alpha_n| \leqslant |a| + M,$$

что и доказывает ограниченность последовательности $\{x_n\}$. □

*Замечание* 3.3. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Это следует из очевидной ограниченности последовательности, рассмотренной в примере 3.6.

**4.** *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда*

*а)* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$;

*в)* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$;

*г)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}$ *(при условии, что* $b\neq 0$*).*

Доказательство. Докажем пункты а) и в). По свойству 1

$$x_n-a=\alpha_n,\quad y_n-b=\beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — БМП.

Для доказательства пункта а) покажем, что $\{(x_n+y_n)-(a+b)\}$ является БМП. В самом деле,

$$(x_n+y_n)-(a+b)=(x_n-a)+(y_n-b)=\alpha_n+\beta_n.$$

По свойству 1 БМП сумма двух БМП $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ сама является бесконечно малой, что и требовалось доказать.

Чтобы доказать пункт в), покажем что бесконечно малой является последовательность $\{x_ny_n-ab\}$:

$$x_ny_n-ab=x_ny_n-x_nb+x_nb-ab=x_n(y_n-b)+b(x_n-a)=x_n\beta_n+b\alpha_n.$$

В силу свойства 3 сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Таким образом, каждое из слагаемых в правой части по свойству 3 БМП ограничено как произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую. Сумма же двух БМП есть БМП по свойству 1 БМП. □

Пример 3.7. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{n^2-1}$.

Решение. При $n\to\infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности (являются ББП). Следовательно, непосредственно применить свойство о пределе частного нельзя. Поэтому необходимо преобразовать общий член этой последовательности, разделив числитель и знаменатель на $n^2$ (на $n$ в максимальной степени). Получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{2+0+0}{1-0}=2.\quad\square$$



### 3.1.6. Предельный переход в неравенствах

**Теорема 3.2.** *Если*

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

*и начиная с некоторого номера* $x_n\geqslant b$*, то* $a\geqslant b$*.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $a<b$. По определению предела последовательности для всякого положительного числа, в том числе и для $\varepsilon=b-a$,

$$\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\quad\forall n>N_\varepsilon\quad|x_n-a|<\varepsilon=b-a,$$

или

$$-(b-a)<x_n-a<b-a.$$

Из правого неравенства получаем: для всякого $n>N_\varepsilon$ имеет место неравенство $x_n<b$, что противоречит условию теоремы. □

*Замечание* 3.4. Из того, что все элементы сходящейся к $a$ последовательности $x_n$ строго больше $b$, вообще говоря, не следует строгое неравенство $a>b$. Например, для всякого $n\in\mathbb{N}$ верно, что $1/n>0$, однако

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

**Следствие 3.1.** *Если элементы сходящихся последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *начиная с некоторого номера удовлетворяют неравенству* $x_n\leqslant y_n$*, то и их пределы удовлетворяют неравенству*

$$\lim_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim_{n\to\infty}y_n.$$

Доказательство. Действительно, начиная с некоторого номера будем иметь, что $y_n-x_n\geqslant 0$. Следовательно, по теореме 3.2

$$\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)\geqslant 0,$$

а по свойству 4 сходящихся последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}y_n-\lim_{n\to\infty}x_n\geqslant 0.$$

□

С помощью данного следствия можно доказать приведенную ниже теорему.

**Теорема 3.3 (о сжатой последовательности).** *Пусть даны три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ и начиная с некоторого номера выполняется двойное неравенство $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ имеют один и тот же предел $a$, то последовательность $\{y_n\}$ также имеет предел $a$.*

Следующую теорему попробуйте доказать самостоятельно.

**Теорема 3.4 (о сохранении знака).** *Если последовательность $x_n$ сходится к положительному числу $a$, то найдется такой номер $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N_0$ окажется $x_n > 0$.*

### 3.1.7. Монотонные последовательности

**Определение 3.10.** Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \leqslant x_{n+1}$, и *убывающей*, если для $n \in \mathbb{N}$ верно, что $x_{n+1} \leqslant x_n$.

**Определение 3.11.** Возрастающая и убывающая последовательности называются *монотонными*.

**Определение 3.12.** Если для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_n < x_{n+1}$, то последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей*; если же для $n \in \mathbb{N}$ верно, что $x_{n+1} < x_n$, — то *строго убывающей*.

**Определение 3.13.** Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

Пример 3.8. Последовательность

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ \ldots$$

строго возрастающая и ограниченная. Очевидно, что она сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Пример 3.9. Последовательность 2, 4, 8, …, $2^n$, … строго возрастающая неограниченная. Она является ББП.



Пример 3.10. Последовательность

$$1,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \ldots,\ \sin\frac{n}{n+1}\pi,\ \ldots$$

строго убывающая ограниченная, причем

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{n}{n+1}\pi = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n+1} = 0.$$

Пример 3.11. Последовательность 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, …, $[n/2]$, … (напомним, что квадратные скобки обозначают целую часть числа) — возрастающая, но не строго возрастающая ББП.

Оказывается, что все монотонные ограниченные последовательности обладают общим свойством — они сходятся.

**Теорема 3.5.** *Монотонная ограниченная последовательность сходится.*

Таким образом, ограниченность монотонной последовательности является необходимым и достаточным условием сходимости.

*Замечание* 3.5. Всякая монотонная последовательность является либо сходящейся, либо бесконечно большой (обоснуйте это самостоятельно). Однако не всякая сходящаяся последовательность является монотонной. В этом можно убедиться на примере 3.1 бесконечно малой, а значит, и сходящейся, но не монотонной последовательности.

Рассмотрим важный пример монотонной ограниченной последовательности.

**Теорема 3.6.** *Последовательность*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{3.1}$$

*сходится.*

Доказательство. Покажем, что последовательность (3.1) возрастает. Действительно, с помощью формулы бинома Ньютона (B.5) можно записать:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k}.$$

Поскольку по определению (B.6) биномиальные коэффициенты

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!},$$

то

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \dots + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\dots\big(n-(n-1)\big)}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots + \\ + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (3.2)$$

Теперь запишем по этой же формуле $(n+1)$-й член:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \dots + \\ + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Сравним члены $x_n$ и $x_{n+1}$. Очевидно, что

$$1-\frac{k}{n} < 1-\frac{k}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Поэтому первые $n$ слагаемых $x_{n+1}$ не меньше соответствующих слагаемых $x_n$. Учитывая, что $x_{n+1}$ содержит еще одно дополнительное неотрицательное слагаемое, получим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_n < x_{n+1}$, т.е. последовательность $x_n$ возрастает.

Далее докажем, что рассматриваемая последовательность (3.1) ограничена. По формуле (3.2)

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}.$$



Воспользуемся неравенством (B.4). Тогда

$$x_n < 1 + \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n} < 3, \quad (3.3)$$

что и доказывает ограниченность последовательности $x_n$.

Будучи монотонной и ограниченной, последовательность (3.1) сходится по теореме 3.5. □

**Определение 3.14.** Предел последовательности (3.1), существующий в силу теоремы 3.6, обозначается буквой $e$ и называется *постоянной Эйлера*:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \quad (3.4)$$

Число $e$ известно как основание натуральных логарифмов. Из соотношений (3.2) и (3.3) следует, что $2 < e < 3$. Можно доказать, что число $e$ является иррациональным, $e = 2{,}7182\dots$ Это число играет существенную роль в математике и ее приложениях.

### 3.1.8. Непрерывное начисление процентов

В банковской системе, как правило, практикуются дискретные проценты по вкладам. Если начальная сумма вклада составляла $S_0$ денежных единиц, $p$ — годовая процентная ставка, представленная в виде десятичной дроби, и проценты начисляются один раз в год, то каждый год вклад будет увеличиваться в $1+p$ раз. Таким образом, через $t$ лет сумма вклада составит

$$S = S_0(1+p)^t.$$

Если проценты начисляются не один, а $n$ раз в году, то при сохранении годовой процентной ставки $p$ сумма вклада каждый раз будет увеличиваться в $1+\frac{p}{n}$ раз. По прошествии $t$ лет таких увеличений произойдет $tn$ и сумма вклада составит

$$S = S_0\left(1+\frac{p}{n}\right)^{tn}. \quad (3.5)$$

Некоторые сложные экономические процессы по своей природе подразумевают столь частое начисление процентов, что его можно

считать непрерывным. Для таких процессов количество $n$ начислений в год принимает очень большие значения, которые можно условно считать близкими к бесконечности. Поэтому сумму вклада $S$ в момент времени $t$ в таких случаях можно определить, если в формуле (3.5) перейти к пределу при $n \to \infty$. Предположим, что процентная ставка $p = 1$, т.е. вклад удваивается каждый год[1], и $t \in \mathbb{N}$. По свойству 4 сходящихся последовательностей и определению числа $e$ (3.4)

$$S = \lim_{n\to\infty} S_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{tn} = S_0 \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{t} = S_0 e^t.$$

Можно доказать, что для произвольной процентной ставки $p$ и любого, не обязательно целого, времени $t > 0$

$$S = S_0 e^{pt}. \tag{3.6}$$

Соотношение (3.6) определяет закон *непрерывного начисления процентов*. Процентная ставка $p$ при непрерывном начислении процентов называется *силой роста*.

Отметим, что, чем чаще начисляются проценты, тем быстрее растет вклад. Данный факт объясняется дополнительной прибавкой сложных процентов, т.е. процентов от процентов. При фиксированной годовой ставке $p$ вклад растет быстрее всего, если проценты начисляются непрерывно.

Поясним сказанное на примере.

Пример 3.12. Предположим, что начальный вклад $S_0 = 1$, процентная ставка $p = 1$ и проценты начисляются $n$ раз в год. Вычислим по формуле (3.5) размер вклада через год для некоторых значений $n$:

$$n = 1: \quad S = (1+1)^1 = 2; \qquad n = 10: \quad S = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2{,}594;$$

$$n = 100: \quad S = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2{,}705;$$

$$n = 1000: \quad S = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2{,}717.$$

[1] Разумеется, не стоит рассчитывать на такие проценты в реальной жизни.



В случае непрерывного начисления процентов через год вклад вырастет максимально и, согласно (3.6), составит $S = e^1 = e \approx 2{,}718$.

## 3.2. Функциональная зависимость

### 3.2.1. Понятие функции

При изучении явлений природы, физических, экономических и других процессов часто встречаются с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что значения одних величин полностью определяют значения других. Например, площадь $S$ круга однозначно определяется значением его радиуса с помощью формулы $S = \pi r^2$.

**Определение 3.15.** Пусть $X$ и $Y$ — два произвольных множества (рис. 3.4). Если каждому элементу $x$ из множества $X$ по некоторому правилу $f$ поставлен в соответствие единственный элемент $y$ из множества $Y$, то говорят, что задана *функция* $f$. Функцию $f$, как правило, обозначают $y = f(x)$ или $f : X \to Y$. При этом $x$ называется *независимой переменной* или *аргументом функции*, $y$ — *зависимой переменной* или *значением функции*. Множество $X$ называется *областью определения* или *областью существования функции* $f$ и обозначается $D(f)$. Множество всех значений, принимаемых функцией $f$, когда аргумент $x$ пробегает всю область определения $X$, называется *множеством значений функции* $f$ и обозначается $E(f)$:

$$E(f) = \Big\{ y \in Y \;\Big|\; y = f(x), x \in X \Big\}.$$

Очевидно, что множество значений функции $E(f)$ содержится в множестве $Y$. При этом $Y$ может также содержать элементы, не входящие в $E(f)$ (рис. 3.4).

**Определение 3.16.** Если $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$, т.е. $X$ и $Y$ являются числовыми множествами, то функция $f : X \to Y$ называется *числовой*.

Пример 3.13. Функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ определена на отрезке $[-1, 1]$, т.е. областью определения является множество $X = [-1, 1]$. Множеством значений функции в данном случае является отрезок $[0, 1]$, или $Y = [0, 1]$.

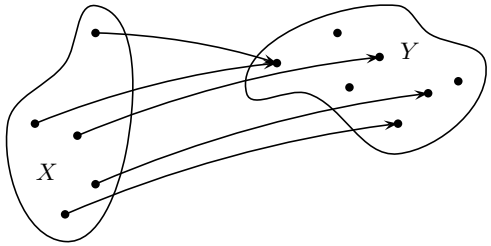


**Рис. 3.4**

**Определение 3.17.** Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянной*. Постоянную функцию часто обозначают так же, как и то единственное значение, которое она принимает.

**Определение 3.18.** *Графиком функции* называется множество всех точек плоскости вида $\big(x; f(x)\big)$, т.е. координаты $x$ и $y$ точек графика связаны соотношением $y = f(x)$.

Например, графиком функции $y = x^2$ является парабола. Естественно, что графиком функции не обязательно является «сплошная» кривая. В частности, графиком функции $y = n!$ будет бесконечное множество изолированных точек (нарисуйте!).

Пример 3.14. Найти $f(2)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(-x)$, если $f(x) = 1 + x + x^2$.

Р е ш е н и е. Очевидно, что $f(2) = 1 + 2 + 2^2 = 7$. Если вместо независимой переменной подставить выражение $1/x$, то получим:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1 + x + x^2}{x^2}.$$

Аналогично $f(-x) = 1 + (-x) + (-x)^2 = 1 - x + x^2$. □

Пример 3.15. Определить область существования функции

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

Р е ш е н и е. В этом случае подкоренное выражение должно быть неотрицательно: $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$. Решив это неравенство, получим, что областью определения является множество $D = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$. □



## 3.2.2. Способы задания функции

Чтобы задать функцию, требуется указать правило: как по каждому значению аргумента $x$ находить соответствующее значение функции $y = f(x)$.

Мы рассмотрим четыре наиболее распространенных способа задания функции: аналитический, неявный, табличный и графический.

### Аналитический способ

Если зависимость между переменными выражена с помощью формул, то говорят, что функция задана *аналитически*. Формула, задающая функцию, указывает совокупность действий, которые нужно выполнить в определенном порядке, чтобы получить соответствующее значение функции.

Пример 3.16. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x - 1}$. Она определена на промежутке $[1, +\infty)$. Чтобы вычислить значение функции для всех $x \in [1, +\infty)$, необходимо из значения аргумента $x$ вычесть единицу и извлечь из полученного числа квадратный корень. Множеством значений является промежуток $[0, +\infty)$. График функции — множество всех точек плоскости $(x, \sqrt{x - 1})$, где переменная $x$ пробегает область определения $[1, +\infty)$ (рис. 3.5).

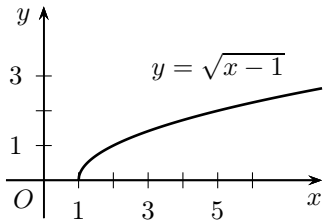


**Рис. 3.5**

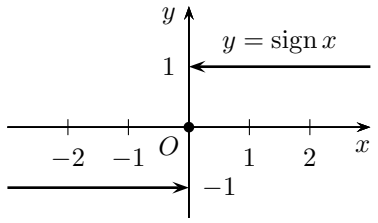


**Рис. 3.6**

Пример 3.17. Пусть

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (0, +\infty), \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x \in (-\infty, 0). \end{cases} \tag{3.7}$$

Данная функция выражена с помощью нескольких формул. Областью ее определения является вся числовая прямая, множество значений состоит из трех элементов: $-1$, 0, 1. График изображен на рис. 3.6. Эту функцию обозначают

$$y = \operatorname{sign} x.$$

### Неявный способ

Предположим, что значения двух переменных $x$ и $y$ связаны между собой некоторым уравнением, например:

$$y - x^2 = 0, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^3 + y^3 = 3xy, \quad (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

Тогда каждому значению переменной $x$ можно поставить в соответствие множество решений $Y_x$ такого уравнения относительно переменной $y$. Полученное соответствие, вообще говоря, не является функцией. В самом деле, для каких-то значений $x$ множество $Y_x$ может оказаться пустым, а для других $x$ оно может содержать два или более элемента. Однако, накладывая определенные ограничения на выбор переменных $x$ и $y$, часто удается добиться, чтобы для всех значений $x$ из выбранного диапазона множество $Y_x$ содержало ровно один элемент. В таких случаях можно говорить о том, что определена функция $y$ переменной $x$. Описанный способ задания функции называемая *неявным*.

Пример 3.18. Уравнение $y - x^2 = 0$ легко решается относительно переменной $y$. Для всякого $x \in \mathbb{R}$ существует единственное решение $y = x^2$, которое является функцией, заданной аналитически.

Вообще, всякая аналитически заданная функция $y = f(x)$ может быть представлена в виде уравнения $y - f(x) = 0$.

Пример 3.19. Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задает окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 3.7). Для значений аргумента $x$, лежащих за пределами отрезка $[-1, 1]$, данное уравнение не имеет решений. Если $x \in (-1, 1)$, то решений два:

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

И только для двух значений аргумента: $x = -1$ и $x = 1$ — существует единственное решение $y = 0$.



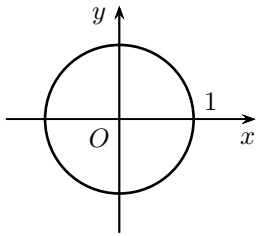


**Рис. 3.7**

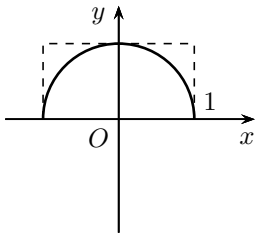


**Рис. 3.8**

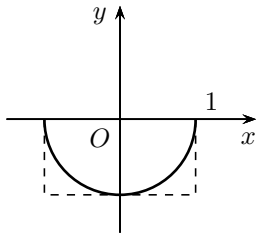


**Рис. 3.9**

Таким образом, не накладывая ограничений на переменные $x$ и $y$, мы не можем утверждать, что данное уравнение задает функцию.

В данном случае построение таких ограничений не составляет труда. Мы можем, например, выбирать только те решения $(x, y)$ уравнения окружности, которые принадлежат прямоугольнику $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ (рис. 3.8). Тогда всякому значению аргумента $x$ соответствует единственное значение функции $y = \sqrt{1 - x^2}$. Если мы будем выбирать решения из прямоугольника $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$ (рис. 3.9), то получим функцию $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Эти две различные функции задаются неявно одним и тем же уравнением.

Для уравнения окружности нам удалось *явно* выразить переменную $y$ через $x$. Такие простые уравнения — скорее исключение, чем правило. Очень часто ни одна из переменных уравнения, неявно задающего функцию, не может быть выражена через другую. Свойства таких функций могут быть исследованы исключительно по определяющим их уравнениям.

### Табличный способ

Предположим, что нас интересует зависимость расхода топлива от скорости движения легкового автомобиля определенной марки. В инструкции к автомобилю имеется табл. 3.1.

Таблица 3.1

| Скорость движения, км/ч | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Расход топлива, л на 100 км | 6,6 | 6,3 | 6,1 | 6,4 | 7,0 | 8,0 |

Из таблицы видно, что расход топлива изменяется в зависимости от скорости движения автомобиля. Если каждому значению скорости, записанному в первой строке таблицы, поставить в соответствие количество литров топлива, указанное во второй строке и в этом столбце, то получим функцию, заданную *таблично*. Областью определения этой функции является множество из 6 чисел, стоящих в первой строке. Множеством значений является также совокупность из 6 чисел второй строки.

С помощью таблицы часто задают функции, значения которых вычислить сложно. Например, широко известны таблицы тригонометрических функций, показательной и логарифмической функций и т.д.

Имеются способы перехода от функций, которые заданы таблично, к функциям, заданным аналитически. Такую процедуру можно проделать, как правило, лишь приближенно.

### Графический способ

В данном случае предполагается, что задан график функции $y = f(x)$ (рис. 3.10).

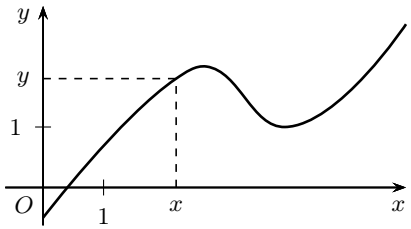


**Рис. 3.10**

Для того чтобы по некоторому значению аргумента $x$ найти соответствующее значение функции, нужно построить на оси $Ox$ точку $x$, затем провести из этой точки перпендикуляр к оси $Ox$, найти точку его пересечения с графиком и определить длину этого перпендикуляра. Значение функции будет равно этому числу с соответствующим знаком. Такой способ задания функции называется *графическим*.

Примерами графического изображения могут быть записи самопишущих приборов (барографы, осциллографы и т.д.).



## 3.2.3. Понятия обратной и сложной функций

**Определение 3.19.** Пусть дана функция $f : X \to Y$. Если каждому $y \in Y$ соответствует единственное значение $x \in X$, для которого $y = f(x)$ (рис. 3.11), то задана функция $\varphi : Y \to X$ такая, что $x = \varphi(y)$. Эта функция называется *обратной* к функции $f(x)$ и записывается в виде

$$x = \varphi(y) = f^{-1}(y).$$

Поскольку функция $f(x)$ является обратной к $f^{-1}(x)$, то функции $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ называют еще *взаимно обратными*.

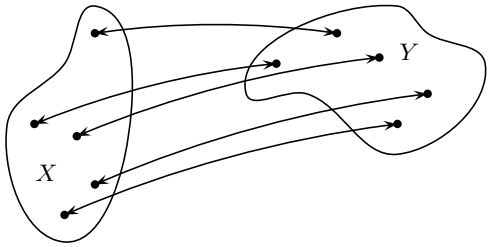


**Рис. 3.11**

Для нахождения обратной функции $y = f^{-1}(x)$ следует решить уравнение $y = f(x)$ относительно переменной $x$.

Пример 3.20. Для функции $y = 2x$ существует обратная $x = \dfrac{y}{2}$.

Пример 3.21. Для функции $y = x^2$, заданной на отрезке $[0, 1]$, существует обратная функция $x = \sqrt{y}$. Однако в случае, когда функция $y = x^2$ задана на отрезке $[-1, 1]$, обратной функции не существует, поскольку одному значению $y$ может соответствовать несколько значений $x$. Например, $y = 1$ соответствуют $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Предположим, что для функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. Пусть множеством значений функции $f$ является отрезок $[c, d]$. Тогда этот отрезок является областью определения обратной функции $f^{-1}$, а отрезок $[a, b]$ — множеством ее значений. Графики функции $y = f(x)$ и обратной к ней

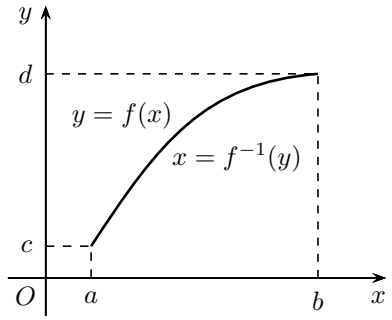


**Рис. 3.12**

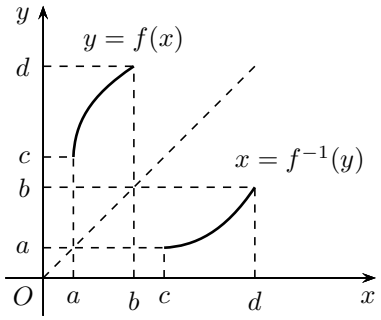


**Рис. 3.13**

$x = f^{-1}(y)$ будут совпадать, если в первом случае аргумент откладывать вдоль оси $Ox$, а во втором — вдоль оси $Oy$ (рис. 3.12).

Если же условиться и в случае функции $f$, и в случае обратной функции $f^{-1}$ независимую переменную обозначать $x$, а зависимую — $y$, то для получения графика функции $y = f^{-1}(x)$ из графика $y = f(x)$ нужно первый график зеркально отобразить относительно биссектрисы I и III четвертей координатной плоскости (рис. 3.13).

**Определение 3.20.** Пусть заданы функции $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ (рис. 3.14). Функция $\varphi : X \to Z$, определяемая по формуле $\varphi(x) = g(f(x))$, называется *сложной функцией* или *суперпозицией функций* $y = f(x)$ и $z = g(y)$.

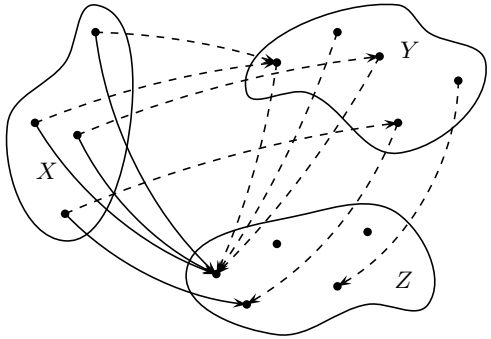


**Рис. 3.14**



Пример 3.22. Функция $z = \sqrt{\cos x}$ является сложной функцией, а именно суперпозицией тригонометрической функции $y = \cos x$ и степенной $z = y^{1/2}$.

Пример 3.23. Функция $y = e^{2x+1}$ также является сложной функцией, представимой как суперпозиция линейной функции $t = 2x + 1$ и показательной $y = e^t$.

Пример 3.24. Для функции $y = \ln \frac{x}{2}$ найти обратную.

Р е ш е н и е. Очевидно, что данная функция определена на промежутке $(0, \infty)$. Множеством ее значений является $\mathbb{R}$. С помощью потенцирования находим $e^y = \frac{x}{2}$. Значит, $x = 2e^y$ является обратной функцией к функции $y = \ln \frac{x}{2}$. Функция $x = 2e^y$ определена на $\mathbb{R}$, множеством ее значений является промежуток $(0, +\infty)$. □

Пример 3.25. Представить сложную функцию $y = \arcsin 3^x$ в виде суперпозиции соответствующих функций.

Р е ш е н и е. Данная сложная функция является суперпозицией степенной функции $u = 3^x$ и обратной тригонометрической функции $y = \arcsin u$. □

### 3.2.4. Элементарные функции

Значительную роль в математике и ее приложениях играет небольшой набор функций, которые принято называть *основными элементарными функциями*. Перечислим их.

1. Простейшей является постоянная функция $y = C$.
2. *Степенная функция* имеет вид $y = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Примеры степенных функций с различными показателями приведены на рис. 3.15–3.20.
3. *Показательная функция* имеет вид $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. На рис. 3.21 и 3.22 представлен график показательной функции в случаях, когда $a > 1$ и когда $0 < a < 1$.
4. *Логарифмическая функция* $y = \log_a x$ задана для $a > 0$, $a \neq 1$. Ее графики для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$ изображены на рис. 3.23 и 3.24.

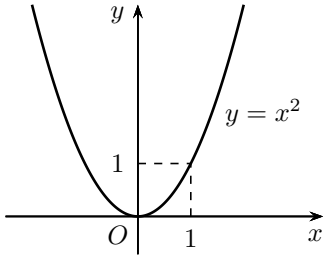


**Рис. 3.15**

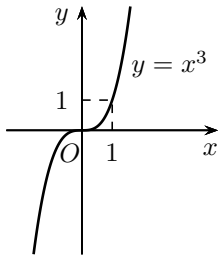


**Рис. 3.16**

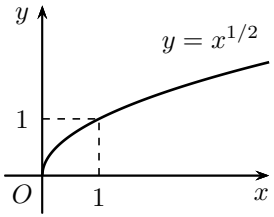


**Рис. 3.17**

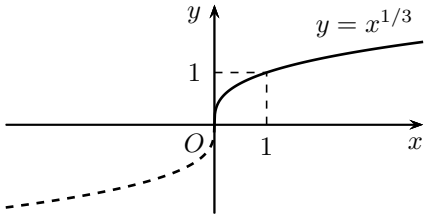


**Рис. 3.18**

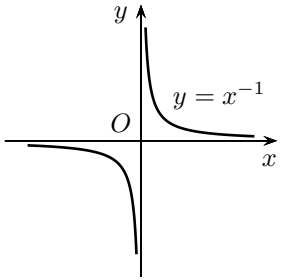


**Рис. 3.19**

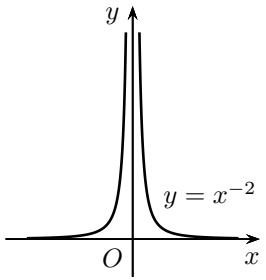


**Рис. 3.20**

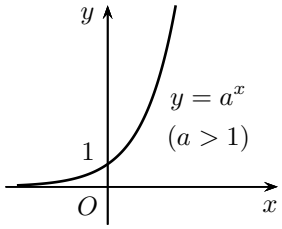


**Рис. 3.21**

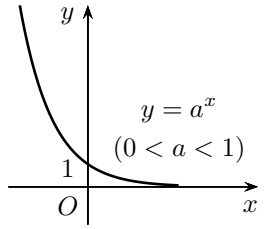


**Рис. 3.22**



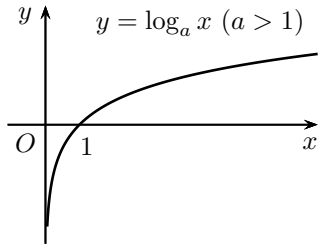


**Рис. 3.23**

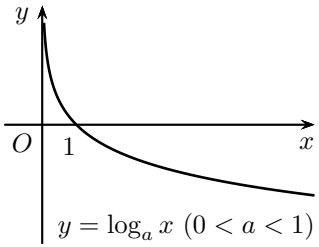


**Рис. 3.24**

5. *Тригонометрическими* называются функции $y = \sin x$ (*синус*, рис. 3.25), $y = \cos x$ (*косинус*, рис. 3.26), $y = \operatorname{tg} x$ (*тангенс*, рис. 3.27) и $y = \operatorname{ctg} x$ (*котангенс*, рис. 3.28).

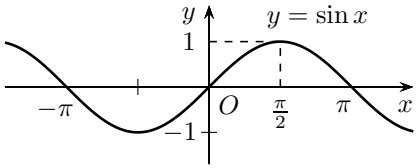


**Рис. 3.25**

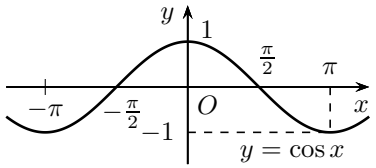


**Рис. 3.26**

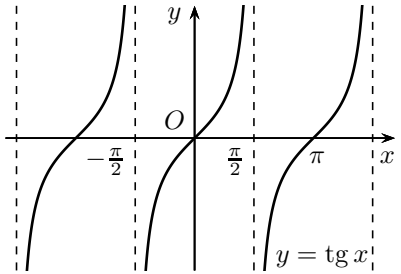


**Рис. 3.27**

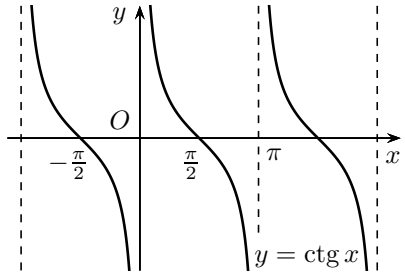


**Рис. 3.28**

6. *Обратными тригонометрическими* называются функции $y = \arcsin x$ (*арксинус*, рис. 3.29), $y = \arccos x$ (*арккосинус*, рис. 3.30), $y = \operatorname{arctg} x$ (*арктангенс*, рис. 3.31) и $y = \operatorname{arcctg} x$ (*арккотангенс*, рис. 3.32), обратные к соответствующим тригонометрическим функциям.

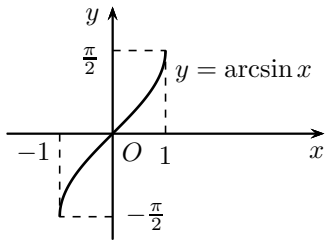


**Рис. 3.29**

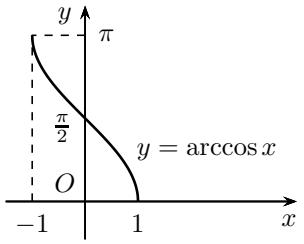


**Рис. 3.30**

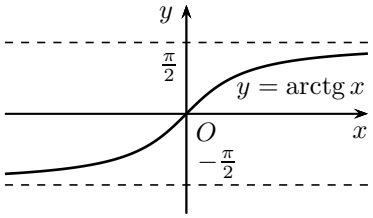


**Рис. 3.31**

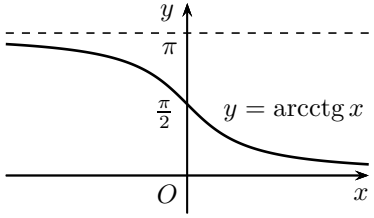


**Рис. 3.32**

**Определение 3.21.** Функция, составленная из основных элементарных функций с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции, называется *элементарной функцией*.

Пример 3.26. Следующие функции являются элементарными:

$$y = \frac{\sin x}{x},\ y = \sqrt{1-x^2},\ y = 2^{-x^2},\ y = |x| = \sqrt{x^2},\ y = x^x = e^{x\ln x}.$$

**Определение 3.22.** Простейшими элементарными функциями являются *целая рациональная функция*, или *алгебраический многочлен*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

а также *дробная рациональная функция*

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Множество целых и дробных рациональных функций образует класс *рациональных функций*.



**Определение 3.23.** Функции, не являющиеся элементарными, называются *неэлементарными*.

Пример 3.27. Функция $y = \operatorname{sign} x$ (см. рис. 3.6) является неэлементарной.

Наше внимание будет сосредоточено преимущественно на элементарных функциях.

### 3.2.5. Основные характеристики функций

**Определение 3.24.** Функция $f : X \to Y$, заданная на симметричном относительно начала координат множестве $X$, называется *четной*, если для всех $x \in X$ верно, что $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если для всех $x \in X$ имеет место равенство $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси $Oy$, а нечетной — относительно начала координат. Примером четной является функция $y = x^2$ (см. рис. 3.15), нечетной — $y = x^3$ (см. рис. 3.16). Функция $y = 2^x$ (см. рис. 3.21) имеет общий вид, т.е. не является ни четной, ни нечетной.

**Определение 3.25.** Функция $f : X \to Y$ называется *возрастающей* (*убывающей*) *на множестве* $A \subset X$, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из того, что $x_1 < x_2$, следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$.

**Определение 3.26.** Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*.

**Определение 3.27.** Функция $f : X \to Y$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*) *на множестве* $A \subset X$, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из того, что $x_1 < x_2$, следует строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

**Определение 3.28.** Строго возрастающие и строго убывающие функции называются *строго монотонными*.

**Определение 3.29.** Интервалы, на которых функция монотонна, называются *интервалами монотонности* этой функции.

Пример 3.28. Функция $y = x^2$ (см. рис. 3.15) монотонно убывает на интервале $(-\infty, 0]$ и возрастает на интервале $[0, +\infty)$, но не является монотонной на всей числовой оси. В данном случае $(-\infty, 0]$ — интервал убывания, $[0, +\infty)$ — интервал возрастания.

**Определение 3.30.** Функция $f : X \to Y$ называется *ограниченной*, если

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, x \in X \quad |f(x)| \leqslant M.$$

В противном случае, т.е. когда

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, x \in X \quad |f(x)| > M,$$

функция $f$ называется *неограниченной*.

Пример 3.29. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ (см. рис. 3.31) является ограниченной на $\mathbb{R}$, так как для всякого $x \in \mathbb{R}$ верно неравенство $|\operatorname{arctg} x| \leqslant \pi/2$.

Пример 3.30. Функция $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 3.27) является неограниченной на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, так как не существует числа $M > 0$ такого, чтобы для всех $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ имела место оценка $|\operatorname{tg} x| \leqslant M$.

**Определение 3.31.** Функция $f : X \to Y$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для всякого $x \in X$ значение $x+T$ также принадлежит области определения $X$ и $f(x+T) = f(x)$. При этом число $T$ называют *периодом функции*. Наименьший положительный период называют *основным периодом*.

Пример 3.31. Периодическими являются все тригонометрические функции, например, $y = \sin x$ (см. рис. 3.25). В качестве ее периода могут выступать числа $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, ... . Основной период всегда единственный. В данном случае он равен $2\pi$.

### 3.2.6. Построение графиков функций

Зная графики основных элементарных функций, научимся строить графики более сложных функций с помощью линейных преобразований.

Пусть задана функция $y = f(x)$ и ее график известен (рис. 3.33).



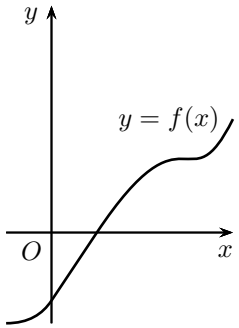


Рис. 3.33

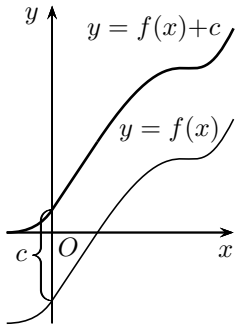


Рис. 3.34

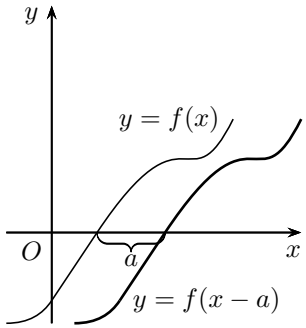


Рис. 3.35

График функции $y = f(x) + c$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса последнего вдоль оси $Oy$ на величину, равную $c$ (рис. 3.34).

График функции $y = f(x - a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига последнего вдоль оси $Ox$ на величину, равную $a$ (рис. 3.35).

График функции $y = kf(x)$, где $k > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $k$ раз вдоль оси $Oy$ (при $k < 1$ — сжатием). Если $k < 0$, то график функции $y = kf(x)$ получается из графика функции $y = -kf(x)$ зеркальным отображением относительно оси $Ox$ (рис. 3.36).

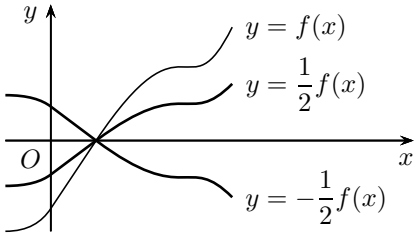


Рис. 3.36

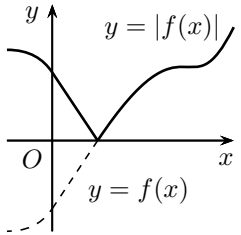


Рис. 3.37

График функции $y = f(kx)$, где $k > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением (при $0 < k < 1$) или сжатием (при $k > 1$) вдоль оси $Ox$. При $k < 0$ нужно зеркально отобразить график функции $y = f(-kx)$ относительно оси $Oy$.

Остановимся еще на одном часто встречающемся преобразовании графиков функций. Чтобы получить график функции $y = |f(x)|$, нужно участки графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси $Ox$, оставить без изменений, а участки графика, лежащие ниже оси $Ox$, зеркально отобразить относительно этой оси (рис. 3.37).

Пример 3.32. Построить график функции $y = |1 + (x-1)^3|$.

Р е ш е н и е. В качестве исходного возьмем график функции $y = x^3$ (рис. 3.38). С помощью сдвига на величину $a = 1$ вправо вдоль оси $Ox$ получим график функции $y = (x-1)^3$ (рис. 3.39). Если сделать перенос полученного графика вдоль оси $Oy$ на одну единицу вверх, то получим график функции $y = 1 + (x-1)^3$ (рис. 3.40). Наконец, зеркально отобразив ту часть графика, которая расположена ниже оси $Ox$, получим график функции $y = |1 + (x-1)^3|$ (рис. 3.41). □

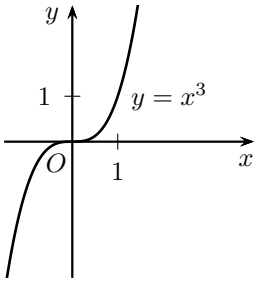


**Рис. 3.38**

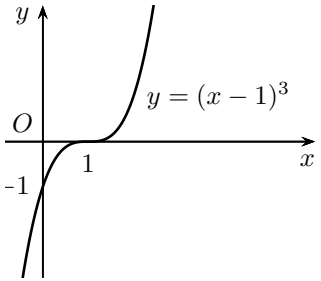


**Рис. 3.39**

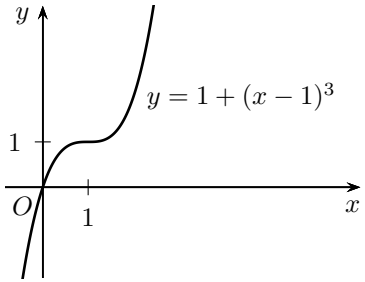


**Рис. 3.40**

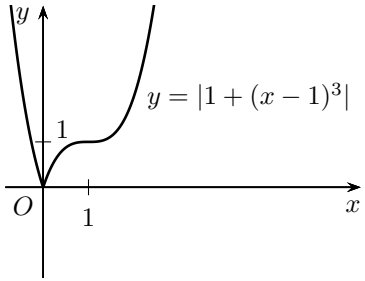


**Рис. 3.41**



### 3.2.7. Функциональная зависимость в экономике

Применение математического аппарата в экономических исследованиях способно принести большую пользу. Но прежде чем применить математические методы, исследователь должен составить *математическую модель* прикладной задачи. Такой математической моделью может, например, стать описание какого-либо экономического процесса в виде математической функции. Рассмотрим важнейшие функциональные зависимости, используемые в экономике.

**Определение 3.32.** *Функция издержек* $C = C(q)$ выражает зависимость издержек производства $C$ от объема выпуска $q$.

Пример 3.33. Если функция издержек некоторого производства задается формулой $C = 100\sqrt{q}$, то при объеме выпуска 25 единиц издержки составят

$$C = 100\sqrt{25} = 500 \text{ ден. ед.}$$

**Определение 3.33.** *Функция выручки* $R = R(q)$ задает зависимость выручки $R$ от объема выпуска $q$.

Пример 3.34. Если продано $q$ единиц товара по цене $p$ за каждую единицу, то выручка $R = pq$.

**Определение 3.34.** *Функция прибыли* $P = P(q)$ — это зависимость прибыли $P$ от объема выпуска $q$.

Прибыль равна разности выручки и издержек:

$$P(q) = R(q) - C(q).$$

**Определение 3.35.** *Точка безубыточности* — это такой объем выпуска $q$, при котором издержки равны выручке: $C(q) = R(q)$.

Очевидно, что при достижении объемом выпуска точки безубыточности прибыль становится равной нулю.

**Определение 3.36.** *Функции спроса и предложения* $D = D(p)$ и $S = S(p)$ задают зависимость спроса и предложения от цены товара $p$ (рис. 3.42).

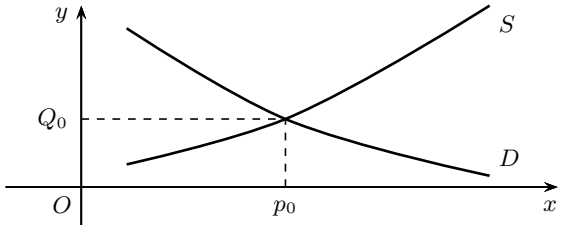


**Рис. 3.42**

Естественно, что по мере увеличения цены предложение растет, а спрос падает.

**Определение 3.37.** *Точка рыночного равновесия* $(p_0, Q_0)$ — это точка пересечения линий спроса и предложения (рис. 3.42). При этом цена $p_0$ называется *равновесной ценой*, а объем продаж $Q_0$ — *равновесным объемом продаж*.

**Определение 3.38.** *Производственная функция* выражает зависимость результатов производства от обусловливающих его факторов.

**Определение 3.39.** *Функция полезности* $u(x)$ дает субъективную числовую оценку полезности некоторого действия.

## 3.3. Предел функции. Два замечательных предела

### 3.3.1. Предел функции по Гейне

**Определение 3.40.** Пусть функция $f$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, за исключением, быть может, самой точки $a$. Возьмем последовательность точек $\{x_n\}$ из этой окрестности, сходящуюся к точке $a$. Значения функции в точках последовательности, в свою очередь, образуют последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ (рис. 3.43).

Число $b$ называется *пределом функции* $f$ *в точке* $x = a$ (или при $x \to a$), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к $a$ и такой, что $x_n \neq a$ для всех $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к $b$.



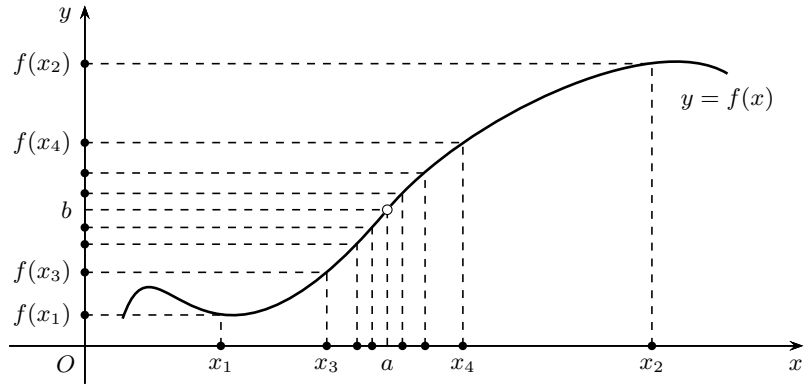


**Рис. 3.43**

Другими словами, число $b$ называется *пределом функции* $f$ *в точке* $x = a$, если

$$\forall \{x_n\},\ x_n \neq a\ (n \in \mathbb{N}),\ \lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Данное определение называется определением *предела функции по Гейне* или *на языке последовательностей*.

Предел функции $f$ в точке $x = a$ обозначается следующим образом:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

**Определение 3.41.** Число $b$ называется *пределом функции* $f$ *при* $x \to \infty$ (или *на бесконечности*), если для любой ББП $\{x_n\}$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к $b$. Для обозначения предела функции на бесконечности применяется запись

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

Пример 3.35. Постоянная функция $f(x) = C$ в каждой точке имеет предел. Действительно, пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к $a$. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $f(x_n) = C$. В этом случае последовательность $\{f(x_n)\}$ будет иметь своим пределом число $C$.

Пример 3.36. Функция

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$$

определена всюду на $\mathbb{R}$, за исключением точки $x = 0$ (рис. 3.44). Выясним, существует ли предел этой функции в точке $x = 0$. С этой целью рассмотрим две последовательности.

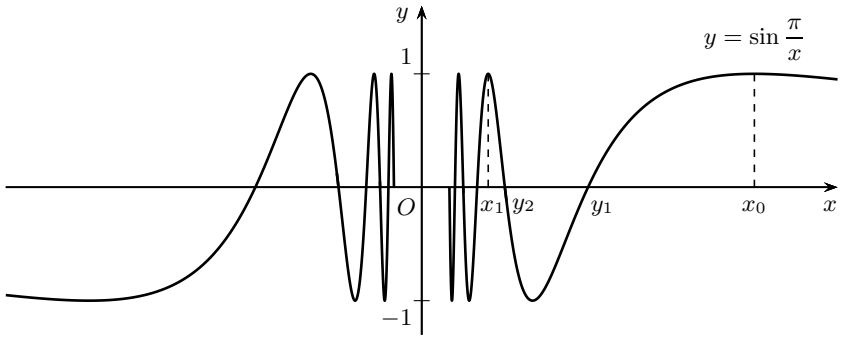


**Рис. 3.44**

Пусть первую последовательность составляют числа $x_n > 0$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, такие, что $\sin\frac{\pi}{x_n} = 1$, т.е.

$$\frac{\pi}{x_n} = (4n+1)\frac{\pi}{2}, \quad x_n = \frac{2}{4n+1}.$$

Очевидно, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке $x = 0$, а соответствующая последовательность значений функции будет состоять из единиц и иметь своим пределом число 1.

Теперь возьмем другую последовательность значений аргумента $\{y_n\}$, где $y_n > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, такую, что $\sin\frac{\pi}{y_n} = 0$, т.е.

$$\frac{\pi}{y_n} = n\pi, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что в этом случае последовательность значений аргумента $\{y_n\}$ сходится к нулю, а соответствующая последовательность значения функции $\{\sin\frac{\pi}{y_n}\}$ также сходится к нулю.



Таким образом, в первом случае последовательность значений функции сходится к единице, а во втором — к нулю. Это означает, что у функции $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ в точке $x = 0$ предел не существует. Данный факт хорошо иллюстрируется графиком рассматриваемой функции (рис. 3.44).

### 3.3.2. Предел функции по Коши

Дадим теперь определение предела функции по Коши, эквивалентное рассмотренному выше определению по Гейне. Два или более определения принято называть *эквивалентными*, если выполнение любого из них влечет выполнение любого другого.

**Определение 3.42.** Число $b$ называется *пределом функции $f$ в точке $x = a$*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta$ такое, что для всякого $x$, удовлетворяющего условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Другими словами, число $b$ называется *пределом функции $f$ в точке $x = a$*, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall\,x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Данное определение называется определением *предела функции по Коши* или *на языке $\varepsilon - \delta$*.

Доказательство эквивалентности определений предела функции по Гейне и по Коши мы опустим.

Определение предела функции по Коши можно переформулировать в следующем виде.

**Определение 3.43.** Число $b$ называется *пределом функции $f$ в точке $x = a$*, если для любой $\varepsilon$-окрестности точки $b$ найдется такая $\delta$-окрестность точки $a$, что для всех $x \neq a$ из этой $\delta$-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в $\varepsilon$-окрестности точки $b$.

Определение 3.43 называется *определением предела функции на языке окрестностей* и выражает *геометрический смысл предела функции* (рис. 3.45).

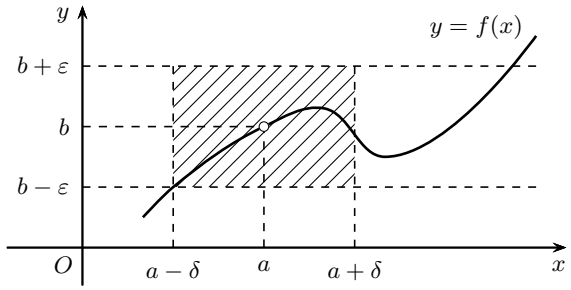


**Рис. 3.45**

### 3.3.3. Односторонние пределы

**Определение 3.44.** Число $c$ называется *правым пределом функции $f$ в точке $x = a$*, если для любой сходящейся к $a$ последовательности $\{y_n\}$, члены которой больше $a$, соответствующая последовательность $\{f(y_n)\}$ сходится к $c$ (рис. 3.46). Символически это записывается следующим образом:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = c.$$

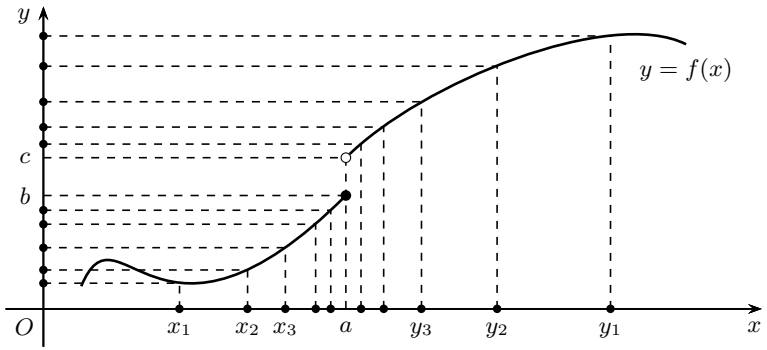


**Рис. 3.46**

Аналогично определяется левый предел.

**Определение 3.45.** Число $b$ называется *левым пределом функции $f$ в точке $x = a$*, если (рис. 3.46)

$$\forall\,\{x_n\},\ x_n < a\ (n \in \mathbb{N}),\ \lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$



В этом случае применяется обозначение $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$.

Если $a = 0$, то используются следующие сокращения:

$$\lim_{x\to+0} f(x), \quad \lim_{x\to-0} f(x).$$

**Определение 3.46.** Правый и левый пределы функции в точке называются *односторонними*.

**Определение 3.47.** Число $b$ называется *пределом функции $f$ при $x \to +\infty$*, если для любой такой ББП $\{x_n\}$, что $x_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $b$.

Аналогично определяется *предел функции при $x \to -\infty$*. Для записи таких пределов применяются обозначения:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Сформулируем эти определения на языке $\varepsilon - \delta$. Число $b$ называется *правым (левым) пределом функции $f$ в точке $x = a$*, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall\,x,\ a < x < a + \delta\ (a - \delta < x < a), \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Пример 3.37. Функция $y = \operatorname{sign} x$ (см. рис. 3.6) имеет односторонние пределы в точке $x = 0$. Очевидно, что

$$\lim_{x\to+0} \operatorname{sign} x = 1, \quad \lim_{x\to-0} \operatorname{sign} x = -1.$$

Следующая теорема устанавливает связь между односторонними пределами и пределом функции.

**Теорема 3.7.** *Для того чтобы функция $f$ имела предел в точке $x = a$, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны односторонние пределы. В этом случае предел функции равен односторонним пределам:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x).$$

### 3.3.4. Бесконечно малые функции

**Определение 3.48.** Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при* $x \to a$ (БМФ), если

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0.$$

Согласно определению предела функции по Коши функция $\alpha(x)$ является *бесконечно малой при* $x \to a$ тогда и только тогда, когда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

*Замечание* 3.6. Обратим внимание на необходимость указания точки, в которой функция является бесконечно малой. Например, функция $y = x^2$ является бесконечно малой при $x \to 0$, но не является бесконечно малой при $x \to 1$. В самом деле,

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0, \quad \lim_{x\to 1} x^2 = 1.$$

**Свойства БМФ**

**1.** *Сумма любого конечного числа БМФ есть БМФ.*

Доказательство. Достаточно доказать это свойство для суммы двух БМФ. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — БМФ при $x \to a$. Докажем, что $\alpha(x) + \beta(x)$ — тоже БМФ при $x \to a$.

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Так как $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, то

$$\exists\, \delta_1 > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta_1, \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично для $\beta(x)$

$$\exists\, \delta_2 > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta_2, \quad |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всякого $x$, удовлетворяющего условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняются менее обременительные условия $0 < |x - a| < \delta_1$ и $0 < |x - a| < \delta_2$, и поэтому

$$\Big|\alpha(x) + \beta(x)\Big| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$



Итак, мы доказали, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad \Big|\alpha(x) + \beta(x)\Big| < \varepsilon.$$

Это и означает, что сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ является БМФ при $x \to a$. □

**2.** *Бесконечно малая функция при* $x \to a$ *является ограниченной в некоторой окрестности точки* $a$.

Доказательство. Пусть функция $\alpha(x)$ бесконечно малая. Согласно определению для всякого $\varepsilon > 0$, в том числе и для $\varepsilon = 1$,

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |\alpha(x)| < \varepsilon = 1.$$

Итак, $\alpha(x)$ ограничена числом 1 в $\delta$-окрестности точки $a$. □

**3.** *Произведение бесконечно малой функции при* $x \to a$ *и функции, ограниченной в некоторой окрестности точки* $a$*, есть бесконечно малая функция при* $x \to a$.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, $f(x)$ — ограниченная в некоторой окрестности точки $a$ функция. Докажем, что произведение $\alpha(x)f(x)$ есть БМФ.

По условию существует $\delta_1 > 0$ такое, что функция $f(x)$ ограничена в $\delta_1$-окрестности точки $a$. Отсюда следует:

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta_1, \quad |f(x)| < M.$$

Пусть $\varepsilon$ — произвольное положительное число. Так как $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, то для всякого положительного числа, в том числе и для $\varepsilon/M$,

$$\exists\, \delta_2 > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta_2, \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Положим теперь $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда при $0 < |x - a| < \delta$ окажется, что

$$|\alpha(x)f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon,$$

откуда и следует, что $\alpha(x)f(x)$ есть БМФ. □

**4.** *Произведение конечного числа БМФ есть БМФ.*

Доказательство. Справедливость этого свойства следует из свойств 2 и 3. □

**5.** *Произведение БМФ на постоянную есть БМФ.*

Доказательство. Заметим, что постоянная функция ограничена, и применим свойство 3. □

### 3.3.5. Бесконечно большие функции

**Определение 3.49.** Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при $x \to a$* (ББФ), если для любого числа $A > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > A$, т.е.

$$\forall\, A > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x)| > A.$$

В этом случае применяется обозначение

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Если известно, что при $0 < |x - a| < \delta$ функция $f(x)$ принимает только положительные (отрицательные) значения, то данное обозначение может быть дополнено путем указания знака бесконечности:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \left( \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \right).$$

*Замечание* 3.7. Не следует забывать указывать точку, в которой функция является бесконечно большой. Например, функция $y = 1/(x - 2)$ является бесконечно большой при $x \to 2$, но не является бесконечно большой при $x \to 1$.

#### Свойства бесконечно больших функций

**1.** *ББФ при $x \to a$ не ограничена ни в какой окрестности точки $x = a$.*

**2.** *Произведение ББФ при $x \to a$ и функции, имеющей ненулевой предел при $x \to a$, есть ББФ при $x \to a$.*



**3.** *Частное ББФ при $x \to a$ и функции, имеющей предел при $x \to a$, есть ББФ при $x \to a$.*

**4.** *Произведение двух ББФ при $x \to a$ есть ББФ при $x \to a$.*

**5.** *Сумма ББФ при $x \to a$ и ограниченной в некоторой окрестности точки $a$ функции есть ББФ при $x \to a$.*

Связь между БМФ и ББФ характеризует следующая теорема.

**Теорема 3.8.** *Если $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, причем $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq a$, то $1/\alpha(x)$ — ББФ при $x \to a$. И обратно, если $f(x)$ — ББФ при $x \to a$, то $1/f(x)$ — БМФ при $x \to a$.*

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ — такая БМФ, что $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq a$. Зафиксируем $A > 0$. По определению БМФ для всякого $\varepsilon > 0$, в том числе для $\varepsilon = 1/A$,

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |\alpha(x)| < \varepsilon = \frac{1}{A}.$$

При этом $|1/\alpha(x)| > 1/\varepsilon = A$. Значит, функция $1/\alpha(x)$ бесконечно большая.

Пусть $f(x)$ есть ББФ. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению ББФ для всякого $A > 0$, в том числе для $A = 1/\varepsilon$,

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x)| > A = \frac{1}{\varepsilon}.$$

В таких условиях $|1/f(x)| < 1/A = \varepsilon$, т.е. функция $1/f(x)$ бесконечно малая. □

### 3.3.6. Свойства предела функции

При исследовании свойств предела функции мы будем пользоваться рассмотренными ранее свойствами БМФ.

**1.** *Функция $f(x)$ имеет предел $b$ при $x \to a$ тогда и только тогда, когда разность $\alpha(x) = f(x) - b$ является БМФ при $x \to a$.*

Доказательство. По определению функция $f(x)$ имеет предел $b$ в точке $a$ тогда и только тогда, когда

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\delta>0\quad\forall\,x,\ 0<|x-a|<\delta,\quad |f(x)-b|<\varepsilon.$$

А это равносильно тому, что функция $\alpha(x)=f(x)-b$ бесконечно малая при $x\to a$. □

**2.** *Если у функции $f(x)$ есть предел при $x\to a$, то этот предел единственный.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть

$$b=\lim_{x\to a} f(x),\quad c=\lim_{x\to a} f(x),\quad b\neq c.$$

Тогда по свойству 1

$$f(x)=b+\alpha(x),\quad f(x)=c+\beta(x),$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — БМФ при $x\to a$. Приравняем правые части:

$$b+\alpha(x)=c+\beta(x),\quad b-c=\beta(x)-\alpha(x).$$

По свойству 1 БМФ сумма $\beta(x)-\alpha(x)$ двух БМФ является БМФ:

$$\lim_{x\to a}\Big(\beta(x)-\alpha(x)\Big)=0.$$

Отсюда следует, что

$$b-c=\lim_{x\to a}(b-c)=\lim_{x\to a}\Big(\beta(x)-\alpha(x)\Big)=0.$$

Значит, $b=c$, что и доказывает единственность предела. □

**3.** *Функция, имеющая предел при $x\to a$, ограничена в некоторой окрестности точки $a$.*

Доказательство. По свойству 1 имеющая предел $b$ в точке $a$ функция $f$ представима в виде $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — БМФ при $x\to a$. По свойству 2 БМФ $\alpha(x)$ ограничена в некоторой $\delta$-окрестности точки $a$, т.е.

$$\exists\,M>0\quad\forall\,x,\ 0<|x-a|<\delta,\quad |\alpha(x)|\leqslant M.$$



Тогда в той же окрестности

$$|f(x)|=|b+\alpha(x)|\leqslant|b|+|\alpha(x)|\leqslant|b|+M,$$

Таким образом, функция $f$ в $\delta$-окрестности точки $a$ ограничена числом $M_1=|b|+M$. □

**4.** *Произведение функции, имеющей предел при $x\to a$, на БМФ при $x\to a$ есть БМФ при $x\to a$.*

Доказательство. Функция, имеющая предел при $x\to a$, по свойству 3 ограничена в некоторой окрестности точки $a$. Значит, по свойству 3 БМФ ее произведение на БМФ при $x\to a$ является БМФ при $x\to a$. □

**5.** *Если функция $f(x)$ имеет отличный от нуля предел при $x\to a$, то функция $1/f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки $a$.*

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x\to a} f(x)=b,\quad b\neq 0.$$

По свойству 1 имеет место представление $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — БМФ при $x\to a$. По определению БМФ для всякого $\varepsilon>0$, в том числе для $\varepsilon=|b|/2$,

$$\exists\,\delta>0\quad\forall\,x,\ 0<|x-a|<\delta,\quad |\alpha(x)|<\varepsilon=\frac{|b|}{2}.$$

Тогда для тех же $x$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|=\frac{1}{|b+\alpha(x)|}\leqslant\frac{1}{|b|-|\alpha(x)|}\leqslant\frac{1}{|b|-\dfrac{|b|}{2}}=\frac{1}{\dfrac{|b|}{2}}=\frac{2}{|b|}.$$

Следовательно, в $\delta$-окрестности точки $a$ функция $1/f(x)$ ограничена числом $M=2/|b|$. □

**6.** *Отношение БМФ при $x\to a$ и функции, имеющей отличный от нуля предел при $x\to a$, есть БМФ при $x\to a$.*

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, $f(x)$ имеет отличный от нуля предел при $x \to a$. Тогда функция

$$\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \alpha(x)\,\frac{1}{f(x)}$$

является бесконечно малой при $x \to a$ как произведение БМФ на ограниченную в силу свойства 5 функцию. □

**7.** *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. *Тогда:*

*а)* $\lim\limits_{x\to a}\Big(f(x)+g(x)\Big) = b + c$; *б)* $\lim\limits_{x\to a}\Big(f(x)-g(x)\Big) = b - c$;

*в)* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = bc$;

*г)* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ *(при условии, что* $c \neq 0$*).*

Доказательство. По свойству 1

$$f(x) - b = \alpha(x), \quad g(x) - c = \beta(x),$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — БМФ при $x \to a$.

Для доказательства пункта а) по свойству 1 достаточно показать, что разность $\big(f(x)+g(x)\big) - (b+c)$ является БМФ при $x \to a$. В самом деле,

$$\big(f(x)+g(x)\big) - (b+c) = \big(f(x)-b\big) + \big(g(x)-c\big) = \alpha(x) + \beta(x).$$

По свойству 1 суммы БМФ $\alpha(x) + \beta(x)$ является БМФ при $x \to a$. Доказательство пункта б) проводится аналогично.

Переходя к пункту в), заметим, что

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - bc &= f(x)g(x) - f(x)c + f(x)c - bc = \\ &= f(x)\big(g(x)-b\big) + c\big(f(x)-b\big) = f(x)\beta(x) + c\alpha(x). \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства есть БМФ при $x \to a$ как сумма двух БМФ. Действительно, функция $f(x)\beta(x)$ бесконечно малая по свойству 4, а функция $c\alpha(x)$ бесконечно малая по свойству 5 БМФ.



Пункт г) доказываем по аналогичной схеме:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} &= \frac{cf(x) - bg(x)}{cg(x)} = \frac{cf(x) - bc + bc - bg(x)}{cg(x)} = \\ &= \frac{c\big(f(x)-b\big) - b\big(g(x)-c\big)}{cg(x)} = \frac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{cg(x)}. \end{aligned}$$

Согласно пункту в) предел знаменателя равен $c^2 \neq 0$. Числитель является БМФ. Тогда по свойству 6 вся дробь — БМФ при $x \to a$. □

**8 (о пределе промежуточной функции).** *Пусть функции* $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ *определены в некоторой окрестности точки* $x = a$, *кроме, быть может, самой точки* $a$, *и удовлетворяют неравенствам*

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x).$$

*Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то

$$\exists\, \delta_1 > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x-a| < \delta_1, \quad |f(x) - b| < \varepsilon,$$

или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Поскольку также $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, то

$$\exists\, \delta_2 > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x-a| < \delta_2, \quad |g(x) - b| < \varepsilon,$$

или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для $0 < |x-a| < \delta$

$$b - \varepsilon < f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x) < b + \varepsilon,$$

или $|\varphi(x) - b| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$. □

Пример 3.38. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x+2}$.

Решение. Здесь можно применить свойство 7:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(x+2)} = \frac{\big(\lim\limits_{x\to 0} x\big)^2 + \lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} x + \lim\limits_{x\to 0} 2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Пример 3.39. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

Р е ш е н и е. Очевидно, что

$$\lim_{x\to 1}(x-1)=0.$$

Поэтому свойство предела частного здесь применить нельзя. Заметим также, что и

$$\lim_{x\to 1}(x^3-1)=0.$$

Значит, нельзя применить теорему 3.8 о том, что функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой. Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=x^2+x+1,\quad x\neq 1.$$

Так как при рассмотрении предела функции в точке $x=1$ ее аргумент не принимает значения, равного единице, то

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3.$$ □

### 3.3.7. Замечательные пределы

**Теорема 3.9.** *Справедливо равенство*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $x\to 0$ как числитель, так и знаменатель стремятся к нулю, поэтому свойство предела частного здесь неприменимо.

Построим окружность радиуса $r=1$. Возьмем центральный угол с радианной мерой, равной $x$, где $x\in(0,\pi/2)$. Выполним соответствующие построения (рис. 3.47). Очевидно, что $AB<BC<BD$. Но $AB=\sin x$, $BC=x$, $BD=\operatorname{tg}x$, поэтому $\sin x<x<\operatorname{tg}x$. Преобразуем данное соотношение:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$



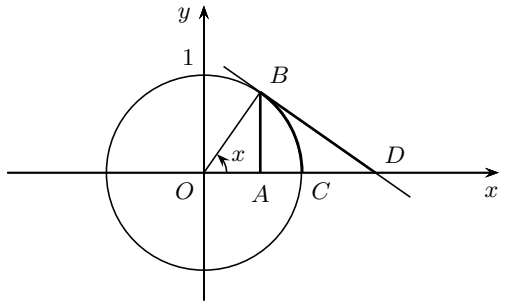


**Рис. 3.47**

В силу четности входящих в эти неравенства функций они справедливы и при $x\in(-\pi/2,0)$. Заметив, что

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1,$$

и применив свойство предела промежуточной функции, получим требуемое равенство (3.8). □

**Определение 3.50.** Равенство (3.8) называется *первым замечательным пределом.*

Следующие соотношения являются следствиями первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1.$$

**Теорема 3.10.** *Справедливо равенство*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{3.9}$$

**Определение 3.51.** Равенство (3.9), представляющее собой обобщение уже известного предела (3.4), называется *вторым замечательным пределом.*

Часто встречаются следствия второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, \tag{3.10}$$

а также

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\quad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$
$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k,\quad k>0. \tag{3.11}$$

В частности,

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Пример 3.40. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{x}$.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Чтобы воспользоваться первым замечательным пределом, в выражении под знаком предела выполним замену переменной, полагая $3x=t$, $x=t/3$:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{\frac{t}{3}}=3\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=3.$$

*Второй способ.* Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot3=3\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}=3\cdot1=3.$$ □

Пример 3.41. Найти $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

Р е ш е н и е. Здесь удобно использовать замену $2x=t$, чтобы свести этот предел к следствию второго замечательного предела (3.10). Действительно, в этом случае имеем, что если $x\to0$, то $t\to0$. Значит,

$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e^2.$$ □

### 3.3.8. Эквивалентные бесконечно малые функции

С целью сравнения значений двух бесконечно малых при $x\to a$ функций в окрестности точки $a$ вводится следующее определение.



**Определение 3.52.** Две бесконечно малые при $x\to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными в окрестности точки* $a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

В этом случае пишут, что $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$.

*Таблицей эквивалентностей* называется приведенный ниже список часто встречаемых пар эквивалентных БМФ. Если $\alpha(x)$ — БМФ при $x\to x_0$, то при $x\to x_0$

1) $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
2) $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
3) $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
4) $\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
5) $\log_a\big(1+\alpha(x)\big)\sim\dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$;
6) $\ln\big(1+\alpha(x)\big)\sim\alpha(x)$;
7) $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$;
8) $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$;
9) $\big(1+\alpha(x)\big)^k-1\sim k\alpha(x)$;
10) $\sqrt{1+\alpha(x)}-1\sim\dfrac{\alpha(x)}{2}$.

*Замечание* 3.8. Из таблицы эквивалентностей следует, что функции $f(x)=\sin x$ и $g(x)=x$ являются эквивалентными в окрестности точки $x=0$, т.е. $\sin x\sim x$ при $x\to0$. Иначе говоря, значения многочлена $g(x)=x$ в окрестности точки $x=0$ мало отличаются от значений функции $f(x)=\sin x$; или можно сказать, что многочлен $g(x)=x$ приближает функцию $f(x)=\sin x$ в окрестности точки $x=0$ (рис. 3.48).

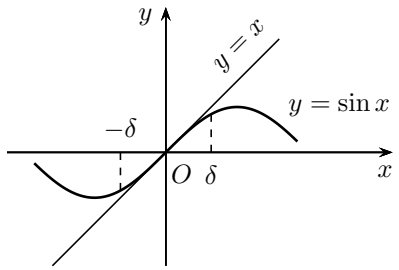


**Рис. 3.48**

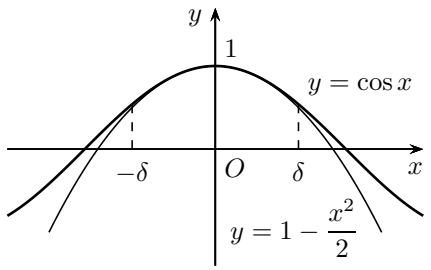


**Рис. 3.49**

Пример 3.42. Показать, что $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

Р е ш е н и е. В самом деле,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1.$$

Значит, функция $\cos x$ приближается многочленом $1 - x^2/2$ в окрестности точки $x = 0$ (рис. 3.49). □

Следующие две теоремы существенно упрощают вычисление некоторых пределов.

**Теорема 3.11.** *Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — эквивалентные БМФ при $x \to a$, а функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то*

$$\alpha(x)f(x) \sim \beta(x)f(x), \quad x \to a.$$

**Теорема 3.12.** *Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если любую из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.*

Пример 3.43. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ (ср. с примером 3.40).

Р е ш е н и е. Функция $\alpha(x) = 3x$ бесконечно малая при $x \to 0$. Согласно таблице эквивалентностей отсюда следует, что $\sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$. Тогда по теореме 3.12

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x} = 3.$$ □

## 3.4. Непрерывные функции

### 3.4.1. Непрерывность функции в точке

Из всего множества функций целесообразно выделить функции, обладающие свойством непрерывности. Грубо говоря, функция непрерывна, если ее график представляет собой сплошную линию, т.е. не имеет разрывов. Непрерывные функции обладают рядом интересных свойств.



**Определение 3.53.** Функция $f$, определенная в некоторой окрестности точки $x = a$, включая саму точку $a$, называется *непрерывной в точке $a$*, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \tag{3.12}$$

т.е. предел функции и ее значение в точке $a$ равны.

Пример 3.44. Функция $y = \operatorname{sign} x$ (см. рис. 3.6) является непрерывной для всех $x \neq 0$. В точке $x = 0$ она не является непрерывной, так как в соответствии с теоремой 3.7 и задачей 3.37 в этой точке не существует ее предела.

**Определение 3.54.** Функция $f$ называется *непрерывной справа в точке $a$* (рис. 3.50), если

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a),$$

и *непрерывной слева в точке $a$* (рис. 3.51), если

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a).$$

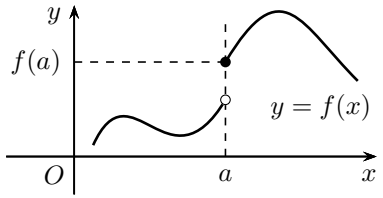


**Рис. 3.50**

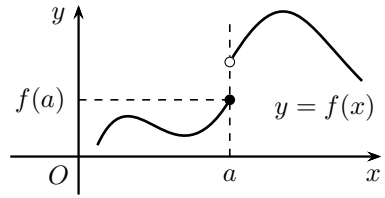


**Рис. 3.51**

Пример 3.45. Рассмотрим функцию $f(x) = [x]$, задающую целую часть числа $x$ (рис. 3.52). В точке $a = 2$ для этой функции

$$f(2) = 2, \quad \lim_{x\to 2+0} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 2-0} f(x) = 1.$$

Итак, функция $f(x)$ непрерывна справа в точке $a = 2$, но не является непрерывной слева и непрерывной в обычном смысле в этой точке.

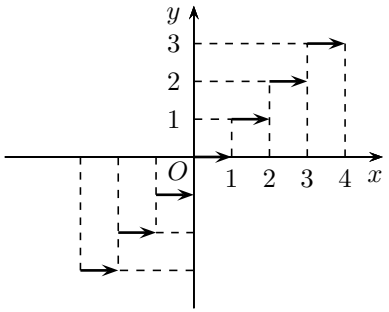


**Рис. 3.52**

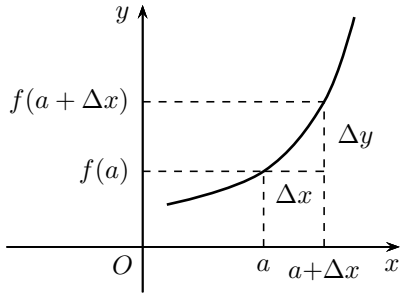


**Рис. 3.53**

**Теорема 3.13.** *Для того чтобы функция $f$ была непрерывной в точке $a$, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной в этой точке справа и слева.*

Данная теорема является по существу переформулированной теоремой 3.7 об односторонних пределах. Приведем еще одно определение непрерывной в точке функции. Если учесть, что соотношения $x \to a$ и $(x - a) \to 0$ равносильны, то получим, что условие (3.12) непрерывности функции $f$ в точке $a$ запишется в виде

$$\lim_{x-a\to 0}\Big(f(x) - f(a)\Big) = 0. \tag{3.13}$$

**Определение 3.55.** Разность $x - a$ называется *приращением аргумента $x$ в точке $a$* и обозначается $\Delta x$, а разность $f(x) - f(a)$ называется *приращением функции $f$ в точке $a$* и обозначается $\Delta y$:

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = f(x) - f(a),$$

иначе $x = a + \Delta x$, $y = f(a) + \Delta y$.

Теперь условие (3.13) можно записать так:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Тогда новое определение непрерывности функции в точке будет следующим.



**Определение 3.56.** Функция $f$ называется *непрерывной в точке $a$*, если ее приращение в этой точке есть БМФ, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Данное определение выражает *геометрический смысл непрерывной в точке функции* (рис. 3.53).

### 3.4.2. Теоремы о непрерывных в точке функциях

Рассмотрим для начала алгебраические свойства непрерывных в точке функций.

**Теорема 3.14.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$. Тогда функции*

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)},\ g(a) \neq 0,$$

*также непрерывны в точке $a$.*

Доказательство. Действительно, пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $a$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to a}\Big(f(x) + g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a).$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи. □

**Теорема 3.15 (о непрерывности сложной функции).** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, а функция $z = g(y)$ непрерывна в точке $y_0$, где $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке $x_0$. Иными словами, суперпозиция непрерывных функций есть функция непрерывная.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность точек $\{x_n\}$, для которой

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x_0.$$

Тогда из непрерывности функции $f(x)$ в точке $x_0$ и определения предела функции по Гейне следует, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Обозначив $f(x_n)$ через $y_n$ для $n \in \mathbb{N}$, получим:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Так как функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0$, то

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = g(y_0), \quad \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0).$$

Итак, доказано, что для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к $x_0$, соответствующая последовательность $\{g(f(x_n))\}$ сходится к $g(f(x_0))$. Следовательно,

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)),$$ □

**Теорема 3.16 (о непрерывности обратной функции).** *Пусть функция $f : X \to Y$ непрерывна в точке $x_0 \in X$. Тогда, если для функции $f$ существует обратная функция $f^{-1} : Y \to X$, она непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$.*

### 3.4.3. Точки разрыва и их классификация

**Определение 3.57.** *Точками разрыва функции $f$* называются те точки, в которых функция $f$ не является непрерывной.

В зависимости от своего характера разрывы допускают следующую классификацию.

**Определение 3.58.** Точка разрыва $a$ функции $f(x)$ называется:



1) *точкой разрыва первого рода*, если в ней существуют левосторонний и правосторонний пределы функции $f(x)$, причем если они:
   а) равны, т.е.
   $$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x),$$
   то $a$ называется *точкой устранимого разрыва*;
   б) различны, т.е.
   $$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x),$$
   то $a$ называется *точкой конечного разрыва*, а модуль разности левостороннего и правостороннего пределов
   $$h = \left| \lim_{x\to a-0} f(x) - \lim_{x\to a+0} f(x) \right|$$
   называется *скачком функции $f(x)$ в точке $a$*;
2) *точкой разрыва второго рода*, если она не является точкой разрыва первого рода, т.е. если в ней не существует хотя бы один из односторонних пределов.

В точках устранимого разрыва в силу равенства односторонних пределов существует двусторонний предел, доопределив функцию значением которого, можно сделать ее непрерывной, т.е. «устранить» разрыв.

*Замечание* 3.9. Обратим внимание на то, что разрывная в точке $x = a$ функция может быть и не определена в этой точке.

Пример 3.46. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Ее график, называемый *мексиканской шляпой*, изображен на рис. 3.54.

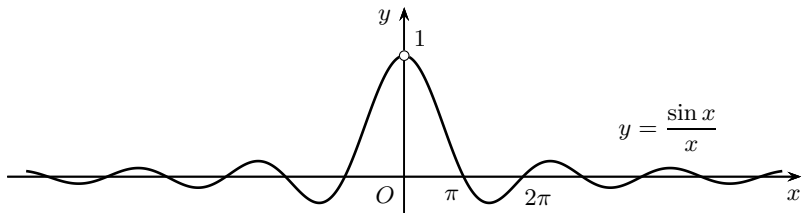


**Рис. 3.54**

Функция $f(x)$ не задана и, следовательно, терпит разрыв в нуле. По формуле (3.8) предел $f(x)$ в нуле равен единице, поэтому точка $a = 0$ является точкой устранимого разрыва. В самом деле, доопределив $f(x)$ в нуле *по непрерывности*, т.е. положив

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

мы ликвидируем разрыв.

Пример 3.47. Функция $y = \operatorname{sign} x$ (см. рис. 3.6) в точке $a = 0$ имеет конечный разрыв, так как левый и правый пределы здесь существуют и различны. Они равны соответственно $-1$ и $1$, поэтому скачок $h = |-1-1| = 2$.

Пример 3.48. Конечный разрыв со скачком $h = 1$ во всех целочисленных точках терпит функция $y = [x]$ (см. рис. 3.52).

Пример 3.49. Функция $y = 1/x$ (см. рис. 3.19) в точке $a = 0$ имеет разрыв второго рода, так как односторонние пределы в данном случае бесконечны. По той же причине точки $a_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, являются точками разрыва второго рода для функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 3.27).

Пример 3.50. Функция $y = \sin \frac{\pi}{x}$ (см. рис. 3.44) в точке $a = 0$ терпит разрыв второго рода, поскольку ее односторонние пределы в этой точке не существуют.

*Замечание* 3.10. Проходя точку разрыва при вычерчивании графика, нам приходится отрывать карандаш от бумаги.

### 3.4.4. Непрерывность элементарных функций

Интересно, являются ли элементарные функции непрерывными? Рассмотрим вначале *простейшие элементарные функции*.

Постоянная функция $f(x) = c$ является непрерывной в каждой точке числовой прямой. Действительно, для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = c = f(a).$$



Непрерывной на всей числовой прямой является и функция $f(x) = x$. Действительно, для всех $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

Отсюда по теореме 3.14 получим, что степенная функция $f(x) = x^n$ для $n \in \mathbb{N}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, так как $x^n$ есть произведение $n$ непрерывных функций $f(x) = x$. Следовательно, по той же теореме 3.14 многочлен

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

есть функция, непрерывная на $\mathbb{R}$.

Рациональная функция $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, где $p$ и $q$ — многочлены, есть также непрерывная функция всюду на $\mathbb{R}$, за исключением тех точек, в которых знаменатель $q(x)$ обращается в нуль.

Можно доказать, что степенная функция $f(x) = x^a$ является непрерывной на всей своей области определения для любых $a \in \mathbb{R}$, а не только для натуральных показателей.

**Теорема 3.17.** *Тригонометрические функции* $\sin x$ *и* $\cos x$ *являются непрерывными на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим, например, функцию $\sin x$. Тогда для всякого $a \in \mathbb{R}$ будем иметь:

$$\Delta y = \sin(a + \Delta x) - \sin a = 2 \cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} =$$

$$= 2 \cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \frac{\Delta x}{2} = \cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Delta x.$$

Итак, приращение функции $\Delta y$ представимо в виде произведения трех функций: первая ограничена, вторая, согласно формуле (3.8), имеет предел при $\Delta x \to 0$ и третья бесконечно малая при $x \to 0$. Тогда по свойству 4 предела функции и свойству 3 БМФ приращение $\Delta y$ является БМФ при $\Delta x \to 0$. Согласно определению непрерывности на языке приращений это означает, что функция $y = \sin x$ непрерывна в точке $a$.

Непрерывность косинуса доказывается аналогично. □

**Следствие 3.2.** *Тригонометрическая функция* $\operatorname{tg} x$ *является непрерывной во всех точках, где* $\cos x \neq 0$, *т.е.* $x \neq \pi/2 + \pi n$ *для* $n \in \mathbb{Z}$, *а функция* $\operatorname{ctg} x$ *— во всех точках, где* $\sin x \neq 0$, *т.е.* $x \neq \pi n$ *для* $n \in \mathbb{Z}$.

Можно доказать, что функции $f(x) = a^x$ и $f(x) = \log_a x$ для $0 < a \neq 1$ также являются непрерывными в области своего существования: первая — на $\mathbb{R}$, вторая — на $(0, +\infty)$.

**Теорема 3.18.** *Если известно, что*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{x\to a} g(x) = c,$$

*причем* $a$ *и* $b$ *не равны нулю одновременно, то*

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = b^c.$$

Доказательство. В силу непрерывности экспоненты и натурального логарифма

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)} = \\ = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x) \lim\limits_{x\to a} \ln f(x)} = e^{c \ln \lim\limits_{x\to a} f(x)} = e^{c\ln b} = e^{\ln b^c} = b^c. \quad \square$$

Исходя из определения элементарных функций, теоремы 3.14 об алгебраических свойствах непрерывных функций, теоремы 3.15 о непрерывности сложной функции и теоремы 3.16 о непрерывности обратной функции, можно доказать следующую теорему.

**Теорема 3.19 (о непрерывности элементарных функций).** *Любая элементарная функция непрерывна во всех точках области своего существования.*

Пример 3.51. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \frac{\sin x}{|x|}.$$

Решение. Пусть $x > 0$. Тогда $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Эта функция непрерывна как частное двух непрерывных функций. Если же $x < 0$,



то функция $f(x) = -\frac{\sin x}{x}$ также непрерывна на промежутке $(-\infty, 0)$ по той же причине. Осталось исследовать функцию в точке $x = 0$. Имеем:

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \left(-\frac{\sin x}{x}\right) = -1.$$

Итак, левый и правый пределы существуют и различны. Следовательно, в точке $x = 0$ функция $f$ имеет разрыв первого рода. $\square$

Пример 3.52. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

Решение. По теореме 3.19 о непрерывности элементарных функций данная функция непрерывна на своей области определения, т.е. всюду на числовой оси, кроме точки $x = 0$. Исследуем функцию $f(x)$ в этой точке:

$$\lim_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Таким образом, $x = 0$ — точка разрыва второго рода. $\square$

### 3.4.5. Раскрытие неопределенностей

Теорема 3.19 утверждает, что всякая элементарная функция непрерывна во всех точках своей области определения. Следовательно, для отыскания предела элементарной функции в точке, принадлежащей ее области определения, достаточно найти значение этой функции в данной точке. Если же точка не принадлежит области определения, то формальное вычисление значения функции в ней может привести к выражениям вида

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0,$$

называемым *неопределенностями*.

В случае, когда в некоторой точке имеет место неопределенность любого из перечисленных типов, мы не можем сказать ничего определенного о пределе функции в этой точке. Предел может существовать,

а может и не существовать. В первом случае он может принимать любые значения, а во втором — функция может быть бесконечно большой, а может и не быть. Столкнувшись с неопределенностью, следует попытаться преобразовать функцию таким образом, чтобы неопределенность исчезла, т.е. *раскрыть неопределенность*.

Пример 3.53. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5+x^2}-3}{x^2-4}$.

Р е ш е н и е. Подставляя в числитель и знаменатель дроби значение $x=2$, обнаруживаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Значит, выражение под знаком предела следует преобразовать. Числитель содержит радикал. В этом случае частное удобно умножить и разделить на «сопряженное» выражение $\sqrt{5+x^2}+3$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5+x^2}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^2-3^2}{(x^2-4)\left(\sqrt{5+x^2}+3\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{5+x^2-9}{(x^2-4)\left(\sqrt{5+x^2}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x^2-4)\left(\sqrt{5+x^2}+3\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{5+x^2}+3}.$$

Мы раскрыли неопределенность, так как пришли к пределу от элементарной функции в точке $x=2$, принадлежащей области определения этой функции. Чтобы найти такой предел, достаточно вычислить значение функции при $x=2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{5+x^2}+3}=\frac{1}{\sqrt{5+2^2}+3}=\frac{1}{6}.$$ □

Пример 3.54. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{99x^2+x+1}{x^2+99}$.

Р е ш е н и е. Числитель и знаменатель данной дроби при $x\to\infty$ являются ББФ, и, таким образом, имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела. Разделим



числитель и знаменатель на $x$ в наибольшей степени, в данном случае на $x^2$. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{99x^2+x+1}{x^2+99}=\lim_{x\to\infty}\frac{99+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{99}{x^2}}=\frac{99}{1}=99.$$

Итак, раскрыв неопределенность, мы смогли применить свойство предела частного. □

Пример 3.55. Найти $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Такие неопределенности часто удается привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi}\sin\frac{x}{2}\frac{x-\pi}{\cos\left(\frac{x-\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to\pi}\sin\frac{x}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{-\sin\frac{x-\pi}{2}}=-\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\sin\frac{x-\pi}{2}}.$$

Функция $\alpha(x)=(x-\pi)/2$ бесконечно малая при $x\to\pi$. Тогда в соответствии с таблицей эквивалентностей (см. п. 3.3.8) $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$, и по теореме 3.12

$$\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\frac{x-\pi}{2}}=-\lim_{x\to\pi}2=-2.$$ □

Пример 3.56. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

Р е ш е н и е. Каждая из двух дробей представляет собой функцию, обратную бесконечно малой. По теореме 3.8 такие функции являются бесконечно большими. Значит, мы имеем дело с неопределен-

ностью вида $\infty - \infty$. Приведем дроби к общему знаменателю и осуществим вычитание:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+3}{(x-3)(x+3)}-\frac{6}{(x-3)(x+3)}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}. \quad \square$$

Пример 3.57. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Р е ш е н и е. Мы столкнулись с неопределенностью вида $1^\infty$, для раскрытия которой выражение под знаком предела, как правило, пытаются привести к представлению (3.10) второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\Big(1+(\cos x-1)\Big)^{\frac{1}{x^2}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\Big(1+(\cos x-1)\Big)^{\frac{1}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x^2}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\Big(1+(\cos x-1)\Big)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}}.$$

По теореме 3.18

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\left(\lim_{x\to 0}\Big(1+(\cos x-1)\Big)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}.$$

Функция $\alpha(x)=\cos x-1$ — бесконечно малая при $x\to 0$, поэтому в основании степени стоит второй замечательный предел (3.10), равный $e$. Чтобы вычислить предел в показателе, воспользуемся примером 3.42, где было установлено, что $1-\cos x\sim x^2/2$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}. \quad \square$$

Для раскрытия неопределенностей вида $0^0$ и $\infty^0$ чаще всего применяют правило Лопиталя, с которым мы ознакомимся позже.



### 3.4.6. Теоремы о непрерывных на отрезке функциях

**Определение 3.59.** Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a,b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a,b)$, непрерывна справа в точке $x=a$ и непрерывна слева в точке $x=b$.

**Теорема 3.20 (об устойчивости знака непрерывной функции).** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $a$ и $f(a)\neq 0$. Тогда существует $\delta$-окрестность точки $a$ такая, что в этой окрестности функция $f$ имеет тот же знак, что и $f(a)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, например, $f(a)>0$. Тогда по определению непрерывности

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Возьмем $\varepsilon=f(a)$. По определению предела для выбранного $\varepsilon$

$$\exists\,\delta>0 \quad \forall\, x,\ 0<|x-a|<\delta, \quad |f(x)-f(a)|<\varepsilon=f(a).$$

Последнее неравенство можно переписать следующим образом:

$$-f(a)<f(x)-f(a)<f(a), \quad 0<f(x)<2f(a).$$

Итак, для всех $x\in(a-\delta,a+\delta)$ имеем неравенство $f(x)>0$, доказывающее теорему. $\square$

*Геометрический смысл теоремы об устойчивости знака* состоит в том, что если функция $f$ непрерывна в точке $a$ и отлична в ней от нуля, то некоторая часть графика этой функции, проходящая через точку $(a,f(a))$, не пересекает ось $Ox$ (рис. 3.55).

**Теорема 3.21 (Больцано — Коши, первая).** *Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка имеет значения разных знаков. Тогда существует точка $c\in(a,b)$, в которой $f(c)=0$.*

*Геометрический смысл первой теоремы Больцано — Коши* также очевиден. Поскольку функция $f$ непрерывна на отрезке, то ее график состоит из одного сплошного куска. Эта кривая соединяет точки

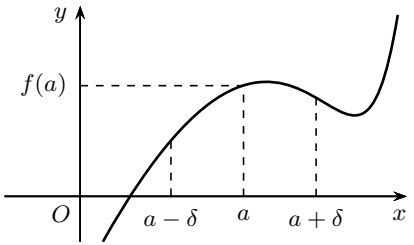


**Рис. 3.55**

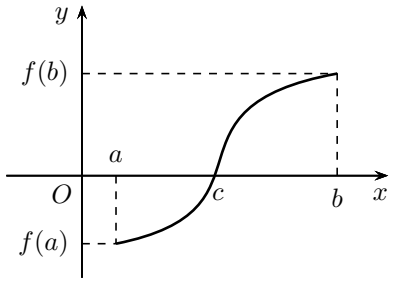


**Рис. 3.56**

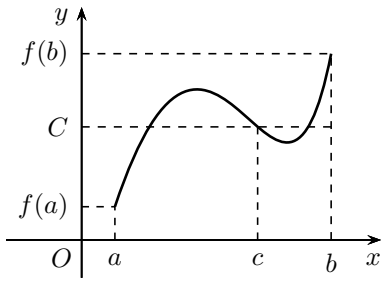


**Рис. 3.57**

$(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, одна из которых лежит ниже оси $Ox$, вторая — выше оси $Ox$ (рис. 3.56). Следовательно, на оси $Ox$ существует точка $c$, в которой график пересекает эту ось.

Первую теорему Больцано — Коши легко обобщить.

**Теорема 3.22 (Больцано — Коши, вторая).** *Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(a) \neq f(b)$. Тогда если $C$ — любое число, лежащее строго между $f(a)$ и $f(b)$, то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = C$.*

Доказательство. Пусть, например, $f(a) < C < f(b)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, $\varphi(a) = f(a) - C < 0$ и $\varphi(b) = f(b) - C > 0$. Следовательно, к функции $\varphi$ можно применить первую теорему Больцано — Коши. В соответствии с ней существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $\varphi(c) = 0$, т.е. $f(c) - C = 0$, или $f(c) = C$. □

Другими словами, теорема 3.22 утверждает, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает любое свое промежуточное значение.



*Геометрический смысл второй теоремы Больцано — Коши* проиллюстрирован рис. 3.57.

**Теорема 3.23 (Вейерштрасса, первая).** *Если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Иначе говоря, если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Отметим, что если в первой теореме Вейерштрасса вместо отрезка $[a, b]$ рассматривать интервал $(a, b)$ или какой-либо полуинтервал, то функция $f(x)$ может оказаться и неограниченной. Например, функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на полуинтервале $(0, 1]$, но не ограничена на нем.

**Теорема 3.24 (Вейерштрасса, вторая).** *Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f$ достигает в некоторых точках этого отрезка своих максимума и минимума.*

Из второй теоремы Вейерштрасса, в частности, следует, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

# Глава 4

# Дифференциальное исчисление функций одной переменной

## 4.1. Производная функции

### 4.1.1. Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в окрестности точки $x = a$. Если независимой переменной $x$ придать приращение $\Delta x$ в этой точке, то функция получит соответствующее приращение

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

По определению непрерывной функции, если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$.

Если же мы хотим получить представление о том, как быстро изменяется значение функции при изменении независимой переменной в окрестности точки $x = a$, то должны сравнить каким-либо образом приращение аргумента $\Delta x$ и приращение функции $\Delta y$. С целью более глубокого изучения функции, исследования скорости изменения ее значений вводится понятие производной — одно из важнейших понятий математики.

**Определение 4.1.** *Производной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$* называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.



Для обозначения производной используются символы:

$$f'(a), \qquad y'(a), \qquad \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом, по определению

$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}. \tag{4.1}$$

Операцию нахождения производной называют *дифференцированием*.

Если функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке $x \in X$, то производную можно рассматривать как функцию переменной $x$ на $X$.

Рассмотрим нахождение производной функции, пользуясь определением.

Пример 4.1. Найти производную функции $f(x) = x^2 + 2x + 2$ в точке $x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Р е ш е н и е. Придадим приращение $\Delta x$ аргументу в точке $x = a$. Найдем соответствующее приращение $\Delta y$ функции $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = ((a+\Delta x)^2 + 2(a+\Delta x) + 2) - (a^2 + 2a + 2) = \\ = 2a\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x = (2a + 2 + \Delta x)\Delta x.$$

Теперь воспользуемся формулой (4.1):

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2a + 2 + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} (2a + 2 + \Delta x) = 2(a + 1).$$

Таким образом, $f'(a) = 2(a + 1)$, $a \in \mathbb{R}$. □

Пример 4.2. Найти производную функции $f(x) = |x - 1|$ в точке $x = 1$.

Р е ш е н и е. Исходя из определения производной, рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|1 + \Delta x - 1| - |1 - 1|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Очевидно, что в этом случае существуют односторонние пределы

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1,$$

не равные между собой. Таким образом, производная функции $f(x)=|x-1|$ в точке $x=1$ не существует.

Учитывая, что существуют вышеуказанные односторонние пределы, в этом случае говорят, что у рассматриваемой функции существуют односторонние производные в точке $x=1$ (правая и левая соответственно). □

Выясним связь между существованием производной в точке и непрерывностью функции.

**Теорема 4.1.** *Если функция $y=f(x)$ в точке $x$ имеет производную $f'(x)$, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Действительно, обозначим

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Будем иметь:

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to0}\Delta x=f'(x)\cdot0=0.$$

Это означает, что функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x$. □

Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не иметь в ней производной. Это видно на примере 4.2. Функция $y=|x-1|$ в точке $x=1$ непрерывна, но не имеет в ней производной.

### 4.1.2. Геометрический смысл производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале $(a,b)$. Предположим, что кривая $AB$ является графиком этой функции (рис. 4.1). Пусть $M(x_0,f(x_0))$ — какая-либо точка графика. Придадим аргументу приращение $\Delta x$ в точке $x_0$. Соответствующую точку на графике обозначим $P(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$.



Через точки $M$ и $P$ проведем прямую и назовем ее *секущей*. Если точку $P$ устремить по кривой $AB$ к точке $M$, то положение секущей будет, вообще говоря, изменяться.

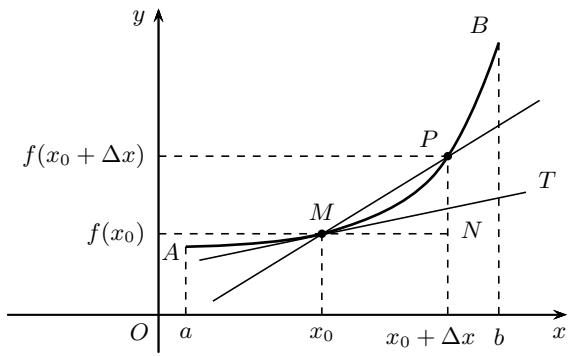


**Рис. 4.1**

**Определение 4.2.** *Касательной к кривой в точке $M$* называется предельное положение (если оно существует) секущей $MP$, когда точка $P$ неограниченно приближается к точке $M$.

Обозначим через $\alpha$ угол между касательной $MT$ и осью $Ox$ (или, что то же самое, между касательной $MT$ и прямой $MN$, рис. 4.1), а через $\varphi$ — угол между секущей $MP$ и осью $Ox$, т.е. $\alpha$ — угол наклона касательной $MT$ к оси $Ox$, а $\varphi$ — угол наклона секущей $MP$ к оси $Ox$. Очевидно, что

$$\lim_{P\to M}\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\alpha.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{NP}{MN}$, то будем иметь, что

$$\lim_{P\to M}\frac{NP}{MN}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Но из рис. 4.1 видно, что

$$NP=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),\quad MN=(x_0+\Delta x)-x_0=\Delta x.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha,$$

или $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$.

*Геометрический смысл производной* состоит в том, что производная функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ есть тангенс угла наклона касательной к ее графику в точке $(x_0,f(x_0))$. Другими словами, $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $M(x_0,y_0)$.

Теперь, учитывая уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом (2.5), несложно получить уравнение касательной:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \tag{4.2}$$

Прямая, проходящая через точку $(x_0,f(x_0))$ и перпендикулярная касательной, называется *нормалью* к графику в этой точке.

Учитывая условие перпендикулярности двух прямых (2.12), можем записать уравнение нормали:

$$y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0) \tag{4.3}$$

при условии $f'(x_0)\neq 0$. Если же $f'(x_0)=0$, то нормалью будет прямая $x=x_0$.

Пример 4.3. Найти уравнение касательной и нормали к графику функции $y=2x+3x^{-2}$ в точке $(1,5)$.

Р е ш е н и е. Полагаем $x_0=1$. Очевидно, что $y(1)=5$. Найдем угловой коэффициент касательной:

$$y'=2-6x^{-3},\quad y'(1)=2-6=-4.$$

Теперь воспользуемся формулой (4.2) и запишем уравнение касательной в точке $(1,5)$:

$$y-5=(-4)(x-1),\quad y-5=-4x+4,\quad y=-4x+9.$$

Уравнение нормали будет иметь следующий вид:

$$y-5=\frac{1}{4}(x-1),\quad y=\frac{1}{4}x+4{,}8.\qquad\square$$



### 4.1.3. Физический смысл производной

Пусть некоторая материальная точка $M$ движется прямолинейно и задан закон ее движения $s=s(t)$, т.е. известно расстояние $s(t)$ от точки $M$ до некоторой начальной точки отсчета в каждый момент времени $t$. К моменту времени $t_0$ точка пройдет расстояние $s(t_0)$, а к моменту времени $t_0+\Delta t$ — расстояние $s(t_0+\Delta t)$. За промежуток времени $\Delta t$ точка $M$ пройдет расстояние $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$.

Отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ можно рассматривать как среднюю скорость движения на промежутке времени $[t_0,t_0+\Delta t]$. Чем меньше промежуток времени $\Delta t$, тем точнее соответствующая средняя скорость будет характеризовать движение точки в момент времени $t_0$. Поэтому предел средней скорости движения при $\Delta t\to 0$ называют *скоростью* (или *мгновенной скоростью*) *движения точки $M$ в момент времени $t_0$* и обозначают $v(t_0)$, т.е.

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

Но выражение справа есть $s'(t_0)$. Таким образом, $v(t_0)=s'(t_0)$, т.е. скорость движения в момент времени $t_0$ есть производная от пройденного расстояния по времени.

Понятие скорости, заимствованное из механики, удобно использовать и при изучении производной функции. Какую бы зависимость ни отражала функция $y=f(x)$, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть средняя скорость изменения зависимой переменной $y$ относительно аргумента $x$ на заданном промежутке, а $y'(x)$ есть скорость изменения $y$ в точке $x$.

### 4.1.4. Правила дифференцирования

**Теорема 4.2.** *Если функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ в точке $x$ имеют производные, то сумма, разность, произведение и частное этих функций также имеют производную в этой точке (частное при условии, что $v(x)\neq 0$) и справедливы следующие формулы:*

$$(u\pm v)'=u'\pm v', \tag{4.4}$$

$$(uv)'=u'v+v'u, \tag{4.5}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2},\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Вначале покажем, что $(u+v)' = u' + v'$. Воспользуемся определением производной:

$$(u+v)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)) - (u(x)+v(x))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \left( \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} \right) =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = u' + v'.$$

Аналогично

$$(u-v)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(u(x+\Delta x)-v(x+\Delta x)) - (u(x)-v(x))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \left( \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} \right) =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = u' - v'.$$

Для вывода формулы нахождения производной произведения поступим следующим образом:

$$(uv)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \left( \tfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} v(x+\Delta x) \right) + \lim_{\Delta x\to 0} \left( u(x) \tfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} \right) =$$
$$= u'v + v'u.$$

Теперь найдем производную функции $1/v$:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{1}{v(x+\Delta x)} - \frac{1}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x) - v(x+\Delta x)}{\Delta x\, v(x+\Delta x)\, v(x)} =$$
$$= -\lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{v(x+\Delta x)\, v(x)} =$$
$$= -v'(x)\, \frac{1}{v^2(x)} = -\frac{v'}{v^2}.$$



Осталось получить формулу для производной частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \frac{1}{v} + u \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \qquad \square$$

### 4.1.5. Таблица производных основных элементарных функций. Производная сложной и обратной функций

**1.** $(C)' = 0$, $C - \text{const}$.

Доказательство. Пусть $f(x) = C$. Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0. \qquad \square$$

**2.** $(\sin x)' = \cos x$.

Доказательство. Имеем:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x\to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Первый предел вычислили исходя из первого замечательного предела, второй — исходя из непрерывности функции $\cos x$. $\square$

**3.** $(\cos x)' = -\sin x$.

Доказательство. Поступим так же, как и при выводе формулы 2:

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= -\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x\to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -1 \cdot \sin x = -\sin x. \qquad \square$$

**4.** $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Доказательство. На основании формул 2, 3 и правила дифференцирования частного (4.6) имеем:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \\ = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$ □

**5.** $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Доказательство. Поступим так же, как и при выводе формулы для производной $\operatorname{tg} x$:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = \\ = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$ □

**6.** $(a^x)' = a^x \ln a$.

Доказательство. Воспользуемся определением производной (4.1), следствием из второго замечательного предела и непрерывностью функции $a^x$. Тогда

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x\to 0} a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \ln a.$$ □

**7.** $(e^x)' = e^x$.

Доказательство. Положив $a = e$ в формуле 6, получим:

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x.$$ □



**Теорема 4.3.** *Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки $x_0$, имеет производную в точке $x_0$ и $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в соответствующей точке $y_0$, $y_0 = f(x_0)$, причем*

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. По теореме 3.16 обратная функция $x = f^{-1}(y)$ существует, является монотонной и непрерывной в некоторой окрестности точки $y_0$. Придадим аргументу $y$ некоторое приращение $\Delta y \neq 0$ в этой точке. Соответствующее приращение $\Delta x$ в силу строгой монотонности тоже будет отличным от нуля. Следовательно,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y/\Delta x},$$

причем если $\Delta y \to 0$, то и $\Delta x \to 0$. Перейдем к пределу в этом равенстве. Будем иметь:

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} (\Delta y/\Delta x)}$$

или $\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. □

**8.** $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Доказательство. Логарифмическую функцию $y = \log_a x$ можно рассматривать как обратную показательной функции $x = a^y$. Поэтому, применив теорему 4.3, получим:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$ □

**9.** $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Доказательство. Полагая $a = e$ в формуле 8, получим:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}.$$ □

**10.** $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказательство. Функция $y = \arcsin x$ является обратной для функции $x = \sin y$. Поэтому в силу теоремы 4.3

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Корень взят со знаком «+», так как

$$y = \arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

поэтому $\cos y > 0$. □

**11.** $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказательство. Функция $y = \arccos x$ является обратной для функции $x = \cos y$. Поэтому в силу теоремы 4.3

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Корень взят со знаком «+», так как

$$y = \arccos x \in (0, \pi),$$

поэтому $\sin y > 0$. □

**12.** $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Доказательство. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является обратной для функции $x = \operatorname{tg} y$. Поэтому в силу теоремы 4.3

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$ □

**13.** $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.



Доказательство. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является обратной для функции $x = \operatorname{ctg} y$. Поэтому в силу теоремы 4.3

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$ □

**Теорема 4.4.** *Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке $x_0$, а функция $y = f(u)$ — в соответствующей точке $u_0$, $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную в точке $x_0$, и справедлива следующая формула:*

$$y'(x_0) = f'(u_0)\,\varphi'(x_0). \tag{4.7}$$

Доказательство. По определению производной (4.1)

$$f'(u_0) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u_0+\Delta u) - f(u_0)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta u}.$$

На основании свойства 1 предела функции можно записать:

$$\frac{\Delta f(u_0)}{\Delta u} = f'(u_0) + \alpha(\Delta u), \qquad \Delta u \neq 0,$$

где $\alpha(\Delta u)$ есть БМФ при $\Delta u \to 0$. Следовательно,

$$\Delta f(u_0) = f'(u_0)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u.$$

Последняя формула верна и при $\Delta u = 0$. Разделив обе части этого равенства на $\Delta x$, получим:

$$\frac{\Delta f(u_0)}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Теперь перейдем к пределу, когда $\Delta x \to 0$. Заметив, что и $\Delta u \to 0$, будем иметь:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta x} = f'(u_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right).$$

Остается учесть, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta x} = \Big(f\big(\varphi(x_0)\big)\Big)', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x_0),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = 0 \cdot \varphi'(x_0) = 0,$$

и получим формулу (4.7). □

**14.** $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Доказательство. Преобразуем исходную функцию:

$$x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}.$$

Тогда, применив теорему 4.4 и правила 7, 9, получим:

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x}\,\alpha\,\frac{1}{x} = x^\alpha\,\alpha\,\frac{1}{x} = \alpha\,x^{\alpha-1}. \quad \square$$

Таким образом, найдены производные всех простейших элементарных функций. Выпишем их в виде так называемой *таблицы основных производных* (считаем $u$ некоторой функцией, зависящей от $x$, т.е. $u = u(x)$):

1) $(C)' = 0$;

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\quad (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}\,u'$ $\quad (\alpha \neq 0)$,
$(x)' = 1$,
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $\quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$,
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\quad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$;

3) $(a^x)' = a^x \ln a$, $\quad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ $\quad (a > 0, a \neq 1)$;

4) $(e^x)' = e^x$, $\quad (e^u)' = e^u\,u'$;

5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $\quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $\quad (a > 0, a \neq 1)$;

6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$;

7) $(\sin x)' = \cos x$, $\quad (\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

8) $(\cos x)' = -\sin x$, $\quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

9) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;

10) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $\quad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$;



11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

13) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $\quad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$;

14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $\quad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

Формулы из таблицы производных, правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и правило дифференцирования сложной функции выражают основные принципы дифференцирования функции. С их помощью можно найти производную любой элементарной функции.

Пример 4.4. Найти производную функции $y = \cos x + x \operatorname{arctg} x + 2$.

Решение. Вначале применим правило дифференцирования суммы (4.4):

$$y' = (\cos x)' + (x \operatorname{arctg} x)' + (2)'.$$

Затем воспользуемся таблицей производных и правилом дифференцирования произведения (4.5):

$$y' = -\sin x + (x)' \operatorname{arctg} x + x(\operatorname{arctg} x)' + 0 = -\sin x + \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}. \quad \square$$

Пример 4.5. Найти производную функции $y = \sin(2x+1)$.

Решение. Данная функция является сложной,

$$y = \sin u, \quad u = 2x + 1.$$

Обе эти функции имеют производные, и по правилу дифференцирования сложной функции (4.7) находим:

$$y' = (\sin u)'(2x+1)' = \cos u \cdot 2 = 2\cos(2x+1). \quad \square$$

### 4.1.6. Логарифмическая производная

Предположим, что $f(x) > 0$ для $x \in (a, b)$. Рассмотрим функцию $y = \ln f(x)$. Дифференцируем ее как сложную, $y = \ln u$, $u = f(x)$:

$$\big(\ln f(x)\big)' = (\ln u)' f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{4.8}$$

Производная от логарифма функции называется *логарифмической производной* этой функции, а последовательное применение операций логарифмирования, а затем дифференцирования — *логарифмическим дифференцированием*.

С помощью указанного метода найдем, например, производную показательно-степенной функции $y = (u(x))^{v(x)}$, где $u$, $v$ — некоторые функции, имеющие в точке $x$ производные, $u(x) > 0$. Применив формулу (4.8), получим:

$$\frac{y'}{y} = \Big(\ln\Big(u(x)\Big)^{v(x)}\Big)' = \Big(v(x)\ln u(x)\Big)'.$$

В правой части имеем производную произведения:

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\,.$$

Следовательно,

$$y' = \Big(u(x)\Big)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right). \tag{4.9}$$

Пример 4.6. Найти производную функции $y = x^x$, $x > 0$.

Р е ш е н и е. Если положить $u = x$ и $v = x$, то можно применить формулу (4.9) и сразу записать производную. Мы же повторим рассуждения, использованные при выводе формулы (4.9). Прологарифмируем исходную функцию

$$\ln y = x \ln x.$$

Дифференцируя это равенство как тождество, т.е. дифференцируя обе его части, находим:

$$\frac{y'}{y} = (x\ln x)' = \ln x + 1.$$

Следовательно, $y' = x^x(1 + \ln x)$. □



### 4.1.7. Производная неявной функции

Пусть функция $y = y(x)$ задана неявно:

$$F(x, y) = 0.$$

Для нахождения производной $y'$ будем дифференцировать обе части этого равенства, считая, что $x$ — независимая переменная, а $y$ — функция переменной $x$. Из полученного уравнения найдем $y'$. Проиллюстрируем этот метод на примере.

Пример 4.7. Найти производную функции $y$, заданной уравнением $y = \cos(x + 3y)$.

Р е ш е н и е. Дифференцируем обе части уравнения:

$$y' = -\sin(x + 3y)(x + 3y)', \quad y' = -\sin(x + 3y)(1 + 3y').$$

Решаем полученное уравнение относительно $y'$:

$$y' + 3\sin(x + 3y)y' = -\sin(x + 3y), \quad y' = \frac{-\sin(x + 3y)}{1 + 3\sin(x + 3y)}.$$ □

### 4.1.8. Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке $x \in (a, b)$. Тогда на промежутке $(a, b)$ будет определена функция $f'(x)$, и тоже можно говорить о ее производной.

Назовем $f'(x)$ *производной первого порядка* функции $f(x)$.

**Определение 4.3.** *Производной второго порядка* функции $f(x)$ называется производная от функции $f'(x)$, если она существует. Ее обозначают

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Производную от второй производной называют *производной третьего порядка* функции $f(x)$ и обозначают

$$y''', \quad f'''(x), \quad \frac{d^3y}{dx^3}.$$

**Определение 4.4.** *Производной n-го порядка* функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка, если она существует. Производная $n$-го порядка обозначается

$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Производные высших порядков широко применяются, в частности, в физике. Выясним, например, физический смысл второй производной.

Пусть материальная точка движется прямолинейно и пройденный ею путь описывается уравнением $s = s(t)$, где $t$ — время. Как известно (см. п. 4.1.3), первая производная от пути по времени есть мгновенная скорость движения точки в момент времени $t$, $v(t) = s'(t)$. Тогда вторая производная от пути по времени равна скорости изменения функции скорости $v(t)$. А это есть ускорение $a(t)$ материальной точки в момент времени $t$. Таким образом, вторая производная от пути по времени есть ускорение, т.е.

$$a(t) = s''(t).$$

Теперь найдем производные $n$-го порядка для некоторых элементарных функций.

1. Рассмотрим степенную функцию $y = x^\alpha$, $x \in (0, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Очевидно, что

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad \dots,$$
$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Если предположить, что $\alpha = k \in \mathbb{N}$, то

$$y^{(k)} = (x^k)^{(k)} = k(k-1)\dots 2\cdot 1 = k!, \quad y^{(k+1)} = (k!)' = 0.$$

2. Замечательным свойством обладает показательная функция $y = e^x$. Для любого $n$ справедлива формула

$$(e^x)^{(n)} = e^x. \tag{4.10}$$

3. Найдем $n$-ю производную функции $y = \sin x$. Будем иметь:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''' = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$



С помощью метода математической индукции можно показать, что

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{4.11}$$

Аналогично

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Приведем еще одну формулу для нахождения производной $n$-го порядка. Пусть $y = uv$, где $u$, $v$ — некоторые функции, имеющие производные любого порядка. Будем последовательно находить производные от функции $y$:

$$y' = u'v + uv',$$
$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$
$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$$
$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Правые части полученных формул похожи на разложение степеней бинома Ньютона $(u+v)^n$, $n = 1, 2, 3$. Только вместо показателей степени стоят порядки производных. Сами функции $u$ и $v$ следует рассматривать в этом случае как производные нулевого порядка: $u = u^{(0)}$, $v = v^{(0)}$. Тогда можно записать формулу для производной $n$-го порядка:

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \dots +$$
$$+ \frac{n(n-k)\dots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + u^{(0)}v^{(n)}. \tag{4.12}$$

Эта формула называется *формулой Лейбница*. Ее можно доказать методом математической индукции.

Пример 4.8. Найти $n$-ю производную функции $y = x^2 \sin x$.

Р е ш е н и е. Полагаем $u = \sin x$, $v = x^2$ и применяем формулу Лейбница (4.12). Находим:

$$u^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$
$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v''' = 0, \quad v^{(n)} = 0, \ n = 3, 4, \dots.$$

Применяя формулу (4.12), имеем:

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)x^2 + n\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2x + \\ + \frac{n(n-1)}{2!}\sin\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2 = \\ = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)x^2 + 2nx\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + \\ + n(n-1)\sin\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right). \qquad \square$$

### 4.1.9. Применение производной в экономике

Пусть $q = q(t)$ выражает количество продукции, произведенной за время $t$ на некотором предприятии. Необходимо определить производительность труда в момент времени $t_0$.

Очевидно, что за период времени от $t_0$ до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от $q_0 = q(t_0)$ до $q_0 + \Delta q = q(t_0 + \Delta t)$. Средняя производительность труда за период времени от $t_0$ до $t_0 + \Delta t$

$$Q_{\text{ср}} = \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Производительность труда $Q$ в момент времени $t_0$ можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от $t_0$ до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$Q = \lim_{\Delta t \to 0} Q_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Пусть функция $C = C(q)$ характеризует зависимость издержек производства от количества выпускаемой продукции. Предположим, что количество продукции увеличивается на $\Delta q$, т.е. равно $q + \Delta q$. Соответствующие издержки производства будут равны $C(q + \Delta q)$. Тогда приращению количества продукции $\Delta q$ соответствует приращение издержек производства продукции:

$$C(q + \Delta q) - C(q) = \Delta C(q).$$

Среднее приращение издержек производства будет равно $\frac{\Delta C(q)}{\Delta q}$. Это есть приращение издержек производства на единицу приращения



количества продукции. Если перейти к пределу, когда $\Delta q \to 0$, то получим значение *предельных издержек производства*:

$$MC = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta C(q)}{\Delta q} = C'(q).$$

Аналогично, если выручка от реализации $q$ единиц товара описывается функцией $R = R(q)$, то *предельная выручка* определяется как

$$MR = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta R(q)}{\Delta q} = R'(q).$$

Теперь рассмотрим еще одно важное понятие, применяемое в экономике, при определении которого используется производная. Это понятие эластичности функции, введенное Аланом Маршаллом в связи с анализом функции спроса. По существу, эластичность является чисто математическим понятием и может применяться при анализе любых дифференцируемых функций.

**Определение 4.5.** *Эластичностью функции* $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется предел отношения относительного изменения функции к относительному изменению аргумента, когда $\Delta x$ стремится к нулю:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Для дифференцируемой функции

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{x}{y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y(x)}\,y'(x). \tag{4.13}$$

Из определения эластичности следует, что при достаточно малых $\Delta x$ выполняется приближенное равенство

$$\frac{\Delta y}{y} \approx E_x(y)\,\frac{\Delta x}{x}.$$

Таким образом, эластичность можно рассматривать как коэффициент пропорциональности между относительными изменениями величин $y$ и $x$. Если, например, $x$ увеличивается на один процент, то $y$ увеличивается (приближенно) на $E_x(y)$ процентов.

Пример 4.9. Найти эластичность функции $y = x^3 + 2$.

Р е ш е н и е. Применив формулу (4.13), будем иметь:

$$E_x(y) = \frac{x}{x^3+2}(x^3+2)' = \frac{3x^3}{x^3+2}.$$

В частности, если $x = 2$, то

$$E_x(y) = \frac{3 \cdot 8}{8+2} = 2{,}4.$$

Это означает, что если переменная $x$ возрастает на 1%, то переменная $y$ увеличится приблизительно на 2,4%. □

## 4.2. Дифференцируемость функции

### 4.2.1. Понятие дифференцируемости функции в точке

Как уже указывалось, операция нахождения производной называется дифференцированием. Применение этого термина оправдано следующими рассуждениями.

**Определение 4.6.** Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* $x$, если существует такое число $A$, что приращение функции в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad \Delta x \to 0, \tag{4.14}$$

где $\alpha(\Delta x)$ — БМФ при $\Delta x \to 0$.

**Теорема 4.5.** *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке $x$, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную $f'(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x$. Тогда справедлива формула (4.14). Разделим обе части этого равенства на $\Delta x$ и получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$



По свойству 1 предела функции это означает, что существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

т.е. $f'(x) = A$.

*Достаточность.* Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x$, т.е. существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Тогда по тому же свойству 1 имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — БМФ при $\Delta x \to 0$. Отсюда находим, что

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

т.е. функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x$. □

Таким образом, в формуле (4.14) можно положить $A = f'(x)$.

### 4.2.2. Дифференциал функции и приближенные вычисления с помощью дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x$. Тогда приращение функции в этой точке может быть записано по формуле (4.14) в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Второе слагаемое $(\alpha(\Delta x)\Delta x)$ является БМФ более высокого порядка по сравнению с функцией $A\Delta x$ (при условии, что $A \neq 0$), так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{A\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{A} = 0.$$

Поэтому первое слагаемое $(A\Delta x)$ является главной частью приращения $\Delta y$, причем это слагаемое есть линейная относительно $\Delta x$ функция.

**Определение 4.7.** Главная линейная относительно $\Delta x$ часть приращения функции

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

в точке $x$ называется *дифференциалом функции* $y = f(x)$ в этой точке.

Для обозначения дифференциала используется символ

$$dy = A\Delta x.$$

Если $A = 0$, то $A\Delta x$ не является, вообще говоря, главной частью приращения $\Delta y$. В этом случае по определению полагают $dy = 0$.

Учитывая теорему 4.5, а именно, что $A = f'(x)$, можно записать:

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{4.15}$$

Теперь найдем дифференциал функции $f(x) = x$. Применив формулу (4.15), получим:

$$dy = (x)'\Delta x = \Delta x.$$

Поэтому дифференциал независимой переменной $x$ определяют следующим образом: полагают $dx = \Delta x$. Тогда формулу (4.15) можно записать в виде

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{4.16}$$

Заметим, что именно последнее равенство объясняет обозначение производной $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{df(x)}{dx}$.

Обратимся снова к формуле (4.14). На основании вышеизложенного можно записать, что $\Delta y \approx dy$ или

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x. \tag{4.17}$$

Формулу (4.17) часто используют в приближенных вычислениях.

Пример 4.10. Найти приближенное значение $e^{0,2}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (4.17). Очевидно, что в данном случае $f(x) = e^x$. Положим $x = 0$, $\Delta x = 0{,}2$.

Будем иметь:

$$e^{x+\Delta x} - e^x \approx (e^x)'\Delta x,$$



или

$$e^{0,2} - e^0 = e^0 \cdot 0{,}2, \quad e^{0,2} \approx 1 + 0{,}2 = 1{,}2.$$

Итак, $e^{0,2} \approx 1{,}2$. Более того, при малых $\Delta x$ и $x = 0$ мы получим формулу $e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$. □

В случае применения формулы (4.17) важно правильно выбрать точку $x$ и $\Delta x$.

### 4.2.3. Геометрический смысл дифференциала

Проведем к графику функции $y = f(x)$ касательную $MT$ в точке $M(x, y)$ (рис. 4.2).

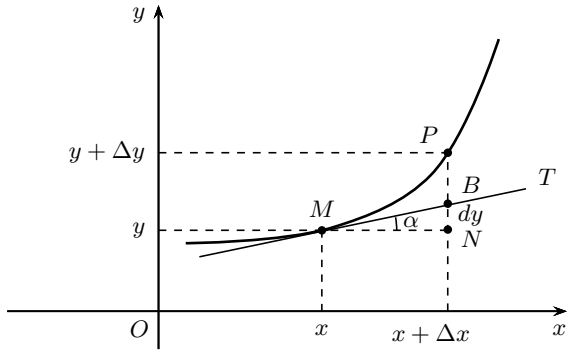


**Рис. 4.2**

Очевидно, что $MN = \Delta x$, $PN = \Delta y$. Из прямоугольного треугольника $MNB$ находим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BN}{MN}, \quad BN = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x.$$

Согласно геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Значит, $BN = f'(x) \cdot \Delta x$.

Теперь сравним последнюю формулу с формулой (4.16). Получим: $dy = BN$.

*Геометрический смысл дифференциала функции* состоит в том, что дифференциал функции $y = f(x)$ в точке $x$ равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда $x$ получит приращение $\Delta x$.

### 4.2.4. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

**Определение 4.8.** Функция $y = f(x)$ имеет в точке $x_0$ *локальный максимум*, если существует $\delta$-окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такая, что

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

**Определение 4.9.** Функция $y = f(x)$ имеет в точке $x_0$ *локальный минимум*, если существует $\delta$-окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такая, что

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

**Определение 4.10.** Локальные максимумы и локальные минимумы функции называются *локальными экстремумами*.

Аналогичным образом можно ввести понятия строгих локальных экстремумов.

Локальными называются свойства функции, которые имеют место в некоторой окрестности той или другой точки.

Из определения локального максимума и минимума следует, что эти понятия имеют локальный характер в том смысле, что неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$ может и не выполняться для всех значений в области определения функции, а должно выполняться лишь в некоторой $\delta$-окрестности точки $x_0$. Следовательно, функция $f$ может иметь несколько локальных экстремумов (рис. 4.3).

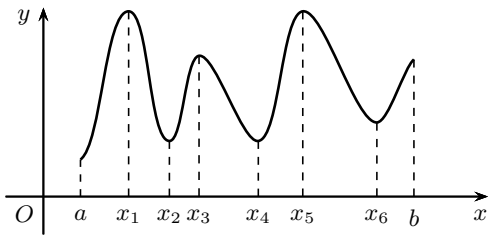


**Рис. 4.3**

**Теорема 4.6 (Ферма).** *Пусть функция $f$ определена на интервале $(a, b)$ и в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ имеет локальный экстремум. Тогда если в точке $x_0$ существует производная, то она равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.*



*Геометрический смысл теоремы Ферма* состоит в том, что если в точке $x_0 \in (a, b)$ функция имеет локальный минимум или максимум (рис. 4.4), то касательная в этой точке к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси $Ox$, т.е. угол наклона касательной к оси $Ox$ равен нулю, и $f'(x_0) = \operatorname{tg} 0 = 0$.

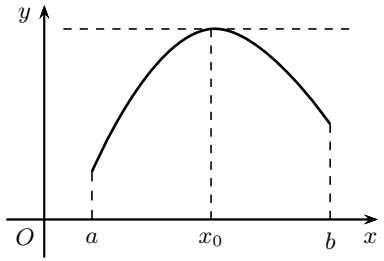


**Рис. 4.4**

**Теорема 4.7 (Ролля).** *Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале $(a, b)$ и на концах отрезка $[a, b]$ принимает равные значения, $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.*

*Геометрический смысл этой теоремы* заключается в том, что у графика непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции, принимающей на концах равные значения и дифференцируемой на $(a, b)$, существует точка $(c, f(c))$, в которой касательная параллельна оси $Ox$ (рис. 4.5). Иначе говоря, такая функция внутри отрезка $[a, b]$ будет иметь экстремум (например, в точке $c \in (a, b)$) и по теореме Ролля $f'(c) = 0$.

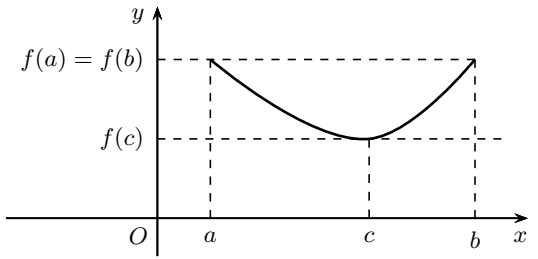


**Рис. 4.5**

**Теорема 4.8 (Лагранжа).** *Если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале $(a,b)$, то существует точка $c \in (a,b)$ такая, что справедлива формула*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{4.18}$$

Перейдем к рассмотрению *геометрического смысла теоремы Лагранжа* (рис. 4.6).

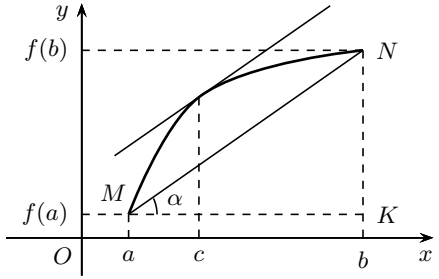


**Рис. 4.6**

Из $\Delta MKN$ имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{NK}{MK} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

т.е. левая часть равенства (4.18) есть тангенс угла наклона секущей $MN$ к оси $Ox$. Правая часть равенства (4.18) есть тангенс угла наклона касательной в некоторой точке $c \in (a,b)$. Таким образом, теорема Лагранжа утверждает, что найдется точка $c \in (a,b)$, в которой касательная к графику функции параллельна секущей, соединяющей концы графика функции (точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$).

Соотношение (4.18) можно записать в виде

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a). \tag{4.19}$$

Формулу (4.19) называют *формулой конечных приращений.*

**Теорема 4.9 (Коши).** *Если функции $f$ и $g$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале $(a,b)$, причем $g'(x) \neq 0$, то существует точка $c \in (a,b)$ такая, что справедливо равенство*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$



# 4.3. Правило Лопиталя. Понятие о формуле Тейлора

## 4.3.1. Правило Лопиталя

**Теорема 4.10 (правило Лопиталя).** *Пусть функции $f$ и $g$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $a$, за исключением, может быть, самой точки $a$. Пусть функции $f$ и $g$ являются БМФ при $x \to a$ и $g'(x) \neq 0$ в окрестности точки $a$. Тогда если существует*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

*то*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4.20}$$

Доказательство. Пользуясь теоремой Коши, можно записать:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где точка $c$ находится между точками $x$ и $a$. Иначе говоря,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Если $x \to a$, то и $c \to a$. Поэтому, переходя в последнем равенстве к пределу, получаем утверждение теоремы. □

В данном случае предел отношения двух БМФ сводится к пределу отношения их производных, что часто является весьма удобным приемом при вычислении пределов. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 4.11. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x}$.

Решение. В данном случае условия правила Лопиталя выполняются. Функции $f(x) = \sin 4x$ и $g(x) = \operatorname{tg} 2x$ являются диф-

ференцируемыми функциями, например на интервале $(-\pi/4, \pi/4)$, и $f(0) = g(0) = 0$. Применим формулу (4.20):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 4x)'}{(\operatorname{tg} 2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{4\cos 4x}{\dfrac{2}{\cos^2 2x}} = 2\lim_{x\to 0}\cos 4x\cos^2 2x =$$
$$= 2\lim_{x\to 0}\cos 4x \lim_{x\to 0}\cos^2 2x = 2. \quad \square$$

Таким образом, первоначально мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. После перехода к пределу отношения производных такая неопределенность уже отсутствует.

Если функции $f$ и $g$ дважды дифференцируемы в некоторой окрестности точки $a$, $f(a) = g(a) = f'(a) = g'(a) = 0$ и существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)},$$

то имеет место равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Это означает, что если $f'(x)$ и $g'(x)$, в свою очередь, являются БМФ при $x \to a$, то правило Лопиталя применимо к пределу

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Нетрудно сформулировать условия, при которых справедлива следующая формула:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}. \tag{4.21}$$

Пример 4.12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Р е ш е н и е. Функции $f(x) = x - \sin x$ и $g(x) = x^3$ являются БМФ при $x \to 0$. Применив правило Лопиталя, найдем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}.$$



Очевидно, что

$$f'(x) = 1 - \cos x, \quad g'(x) = 3x^2$$

также являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Поэтому имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}.$$

Последний предел есть первый замечательный предел. Однако и его можно вычислить с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\cos x = \frac{1}{6}. \quad \square$$

При решении последнего примера можно воспользоваться формулой (4.21), положив $n = 3$.

Правило Лопиталя остается в силе и в случае $a = \infty$ или $a = \pm\infty$. В частности, если функции $f$ и $g$ являются БМФ при $x \to \infty$ и существует

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Итак, мы рассмотрели случай отыскания предела частного $\frac{f(x)}{g(x)}$, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ являются БМФ при $x \to a$. Теперь

рассмотрим такой же предел, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ являются ББФ при $x \to a$. Можно показать, что в этом случае имеет место утверждение, аналогичное теореме 4.10. При этом можно полагать, что $a = \infty$ или $a = \pm\infty$.

Пример 4.13. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x}$.

Р е ш е н и е. Функции $f(x) = \ln^2 x$ и $f(x) = x$ являются ББФ при $x \to +\infty$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}}{1} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Очевидно, что целесообразно еще раз применить правило Лопиталя. Получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0. \qquad \square$$

### 4.3.2. Понятие о формуле Тейлора

В определении функции не говорится о том, с помощью каких средств находятся значения зависимой переменной $y$ по значениям $x$. Это нелегко сделать, когда рассматриваются тригонометрические, показательные или логарифмические функции.

Для вычисления значения рассматриваемой функции ее можно заменить многочленом $P_n(x)$ степени $n$, значения которого легко найти с помощью арифметических действий. При определенных условиях приближенно представить функцию $f(x)$ в виде многочлена и дать оценку такого приближения позволяет формула Тейлора.

**Теорема 4.11.** *Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и имеет в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любого $x$ из этой окрестности найдется точка $c \in (x_0, x)$ такая, что справедлива формула*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (4.22)$$



Запишем формулу (4.22) в виде

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

где

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (4.23)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (4.24)$$

**Определение 4.11.** Многочлен $P_n(x)$, определяемый формулой (4.23), называется *многочленом Тейлора* для функции $y = f(x)$ в точке $x_0$.

**Определение 4.12.** Функция $R_n(x)$, определяемая формулой (4.24), называется *остаточным членом в форме Лагранжа.*

**Определение 4.13.** Формула (4.22) называется *формулой Тейлора* с остаточным членом в форме Лагранжа.

Формула Тейлора (4.22) позволяет заменить функцию $f(x)$ многочленом Тейлора (4.23)

$$f(x) \approx P_n(x)$$

с погрешностью, равной значению остаточного члена $R_n(x)$.

Если в формуле (4.22) положить $x_0 = 0$, то получим:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (4.25)$$

где $c$ находится между 0 и $x$.

**Определение 4.14.** Формула (4.25) называется *формулой Маклорена.*

Приведем разложения по формуле Маклорена некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{4.26}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cos c,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos c,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}},$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n + \\ + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)(1+c)^{\mu-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Пример 4.14. Найти число $e$ с точностью 0,001.

Решение. Воспользуемся формулой (4.26). Положим в ней $x = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

Для нахождения числа $e$ с точностью 0,001 определим $n$ из условия, что остаточный член $e^c/(n+1)!$ должен быть меньше 0,001. Так как $0 < c < 1$, то $e^c < e^1 < 3$. Поэтому неравенство

$$\frac{e^c}{(n+1)!} < 0,001$$

выполняется начиная с $n = 6$:

$$\frac{e^c}{7!} < \frac{3}{5040} = 0,0006 < 0,001.$$

Получаем приближенное равенство

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx$$
$$\approx 2 + 0,5 + 0,1667 + 0,0417 + 0,0083 + 0,0014 = 2,7181 \approx 2,718,$$

т.е. $e \approx 2,718$. □



# 4.4. Исследование функции с помощью производной

## 4.4.1. Условие постоянства функции

**Теорема 4.12.** *Пусть функция $f$ непрерывна на промежутке $X$ и имеет внутри него производную $f'(x)$. Для того чтобы функция $f(x)$ была постоянной на $X$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ внутри $X$.*

Доказательство. *Необходимость.* Если $f(x) = C$, то для всякого $x \in X$ верно, что $f'(x) = (C)' = 0$.

*Достаточность.* Пусть $f'(x) = 0 \ \forall x \in X$. Фиксируем некоторую точку $x_0 \in X$ и возьмем произвольное $x \in X$. К разности $f(x) - f(x_0)$ можно применить формулу конечных приращений (4.19):

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

где $c$ — некоторая точка, находящаяся между $x$ и $x_0$. Но по условию $f'(c) = 0$. Следовательно, $f(x) = f(x_0) \ \ \forall x \in X$. □

## 4.4.2. Достаточное условие монотонности функции

Рассмотрим достаточное условие строгой монотонности непрерывной функции на промежутке.

**Теорема 4.13.** *Если функция $f$ непрерывна на промежутке $X$, дифференцируема внутри него и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) внутри $X$, то функция $f$ является строго возрастающей (строго убывающей) на $X$.*

Доказательство. Пусть, например, $f'(x) > 0$ внутри промежутка $X$. Тогда возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. На отрезке $[x_1, x_2]$ к функции $f$ применима формула конечных приращений (4.19):

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $c \in (x_1, x_2)$.

Так как $f'(c) > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. функция $f$ на промежутке $X$ является возрастающей. □

Пример 4.15. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = 4x^3 + 9x^2 + 6x + 2$.

Р е ш е н и е. Рассматриваемая функция определена на числовой прямой. Найдем ее производную: $y' = 12x^2 + 18x + 6 = 6(2x^2 + 3x + 1)$.

Определим интервалы знакопостоянства производной. С этой целью решим уравнение $2x^3+3x+1 = 0$ и получим $x_1 = -1$, $x_2 = -1/2$. Следовательно, $y' = 2(x + 1)(x + 1/2)$.

Будем иметь: если $x \in (-\infty, -1) \cup (-1/2, +\infty)$, то $y' > 0$; если же $x \in (-1, -1/2)$, то $y' < 0$. Значит, на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(-1/2, +\infty)$ функция возрастает, а на $(-1, -1/2)$ — убывает. □

### 4.4.3. Необходимые и достаточные условия локального экстремума

**Теорема 4.14 (необходимое условие экстремума).** *Пусть функция $f$ определена на интервале $(a, b)$ и в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ имеет локальный экстремум. Тогда если в точке $x_0$ существует производная, то она равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.*

Заметим, что приведенное условие повторяет теорему Ферма. Другими словами, теорема Ферма является необходимым условием экстремума функции.

**Определение 4.15.** *Стационарной точкой функции $f$* называется точка, в которой производная $f'(x)$ равна нулю.

Если $f$ — дифференцируемая на некотором промежутке функция, то точками экстремума могут быть лишь стационарные точки. Однако не каждая стационарная точка является точкой экстремума. Например, функция $y = x^3$ имеет стационарную точку $x = 0$ ($y' = 3x^2$), но очевидно, что эта точка не является точкой экстремума. Поэтому целесообразно найти достаточные условия локального экстремума.

**Теорема 4.15 (первое достаточное условие экстремума).** *Пусть функция $f$ дифференцируема в некоторой $\delta$-окрестности точки $x_0$. Тогда если $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) > 0$ и $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$, то в точке $x_0$ функция $f$ имеет локальный максимум; если же $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) < 0$ и $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$, то в точке $x_0$ функция $f$ имеет локальный минимум. Если $f'(x)$ имеет во всей $\delta$-окрестности один и тот же знак, то в точке $x_0$ локального экстремума нет.*



Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть производная меняет знак при переходе через точку $x_0$ с плюса на минус, т.е. $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) > 0$ и $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$. Тогда, учитывая достаточное условие монотонности, получаем, что функция $f$ возрастает на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$, т.е.

$$f(x_0) > f(x) \qquad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0),$$

и убывает на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, т.е.

$$f(x_0) < f(x) \qquad \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Из последних двух неравенств и определения 4.8 следует, что $x_0$ — точка локального максимума функции $f$.

Аналогично рассматривается случай, когда производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $x_0$.

Пусть теперь производная не меняет знак при переходе через точку $x_0$. Предположим, например, что $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$. Тогда по теореме 4.13 функция $f$ возрастает на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Будем иметь: $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f(x) < f(x_0)$ и $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f(x) > f(x_0)$. Следовательно, точка $x_0$ не является точкой локального экстремума. □

Условия теоремы можно интерпретировать следующим образом. Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку $x_0$, то функция $f$ имеет в точке $x_0$ локальный экстремум. Причем если производная меняет знак с плюса на минус, то точка $x_0$ является точкой максимума, если же с минуса на плюс, — точкой минимума. Очевидно, что теорема 4.15 имеет простой геометрический смысл.

Пример 4.16. Найти точки экстремума функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1.$$

Р е ш е н и е. Данная функция дифференцируема на всей числовой прямой. Найдем ее производную:

$$y' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3).$$

Теперь находим стационарные точки функции:

$$3(x^2+2x-3)=0, \quad x_1=-3,\ x_2=1.$$

Точки $x_1=-3, x_2=1$ являются точками возможного локального экстремума. Воспользуемся первым достаточным условием экстремума. Для этого изучим знак производной при переходе через эти точки. Очевидно, что

$$\forall\, x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)\ \ f'(x)>0, \qquad \forall\, x\in(-3,1)\ \ f'(x)<0.$$

Следовательно, в точке $x_1=-3$ рассматриваемая функция имеет локальный максимум, $y(-3)=28$, а в точке $x_2=1$ — локальный минимум, $y(1)=-4$. □

Часто при исследовании точек возможного локального экстремума удобно применять следующую теорему.

**Теорема 4.16 (второе достаточное условие экстремума).** *Пусть точка $x_0$ есть стационарная точка функции $f$, в которой существует вторая производная $f''(x_0)$. Тогда если $f''(x_0)<0$, то точка $x_0$ является точкой локального максимума функции $f$, если $f''(x_0)>0$, то точка $x_0$ является точкой локального минимума.*

Доказательство. Используя определение второй производной, можем записать:

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Поскольку точка $x_0$ является стационарной, то по определению 4.15 $f'(x_0)=0$. Значит,

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Пусть, например, $f''(x_0)>0$. Тогда, по теореме 3.20 в некоторой окрестности точки $x_0$ будет выполняться и следующее неравенство:

$$\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}>0.$$



Поэтому если $\Delta x<0$, то $f'(x_0+\Delta x)<0$; если же $\Delta x>0$, то $f'(x_0+\Delta x)>0$, т.е. при переходе через точку $x_0$ производная меняет знак с минуса на плюс. А это означает , что $x_0$ — точка локального минимума (см. теорему 4.15).

Аналогично рассматривается случай, когда $f''(x_0)<0$. □

Второе достаточное условие экстремума удобно тем, что в данном случае исследуется знак второй производной $f''(x)$ только в самой стационарной точке.

Обратимся теперь к примеру 4.16. Найдем вторую производную функции $y$: $y''=6(x+1)$. Очевидно, что $y''(-3)=-12<0$, $y''(1)=12>0$. Следовательно, в соответствии со вторым достаточным условием тоже можно сделать заключение, что точка $x=-3$ является точкой локального максимума, а точка $x=1$ — точкой локального минимума.

### 4.4.4. Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. По второй теореме Вейерштрасса функция $f$ принимает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения. Поставим вопрос об их отыскании. Пусть, например, требуется отыскать наибольшее значение функции $f$. Тогда нужно найти все точки локального максимума и значения функции в этих точках. Наибольшее значение может достигаться также на одном из концов отрезка. Поэтому, сравнив значения функции во всех точках локального максимума и значения $f(a)$ и $f(b)$, найдем наибольшее из них. Оно и будет наибольшим значением функции $f$ на отрезке $[a,b]$.

Аналогично находится наименьшее значение функции $f$ на отрезке $[a,b]$.

Если функция $f$ дифференцируема на $(a,b)$, то можно поступить следующим образом: найти все стационарные точки функции $f$ на $(a,b)$, вычислить значения функции в стационарных точках и значения $f(a)$ и $f(b)$; наименьшее из них будет наименьшим значением функции на отрезке $[a,b]$, а наибольшее из них — наибольшим значением функции.

Задача об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции часто возникает в приложениях, в том числе в экономике.

### 4.4.5. Выпуклые функции

Пусть функция $f$ дифференцируема на интервале $(a, b)$. Тогда в каждой точке ее графика существует касательная.

**Определение 4.16.** Функция $f$ называется *выпуклой вверх (выпуклой)* на интервале $(a, b)$, если ее график расположен ниже любой касательной на $(a, b)$ (рис. 4.7).

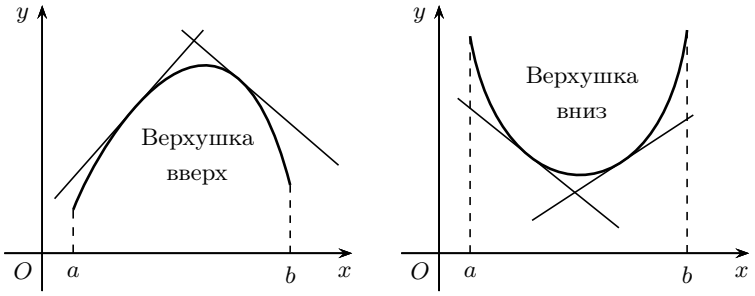


**Рис. 4.7**

**Определение 4.17.** Функция $f$ называется *выпуклой вниз (вогнутой)* на интервале $(a, b)$, если ее график расположен выше любой касательной на $(a, b)$ (рис. 4.7).

**Теорема 4.17 (достаточное условие выпуклости).** *Если функция $f$ имеет на интервале $(a, b)$ вторую производную и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) во всех точках $x \in (a, b)$, то функция $f$ выпукла вниз (выпукла вверх) на $(a, b)$.*

Доказательство. Пусть $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) > 0$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$. Запишем уравнение касательной к графику функции $f$ в точке $(x_0, f(x_0))$ (см. формулу (4.2)):

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{4.27}$$

Теперь запишем формулу Тейлора для функции $f$ в точке $x_0$ с остаточным членом в форме Лагранжа (4.22), $n = 1$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\theta)(x - x_0)^2,$$

где точка $\theta$ находится между $x$ и $x_0$.



По условию теоремы $\frac{1}{2}f''(\theta)(x - x_0)^2 > 0$. Отсюда можно получить, что

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{4.28}$$

Поскольку правые части соотношений (4.27) и (4.28) совпадают, то из сравнения их левых частей следует, что значение $y$ ординаты касательной меньше значения функции в точке $x$. Значит, график функции $f$ находится выше касательной, а функция $f$ является выпуклой вниз.

Аналогично рассматривается случай, когда $f''(x) < 0$. □

**Определение 4.18.** Точка $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$, называется *точкой перегиба* непрерывной функции $f$, если слева и справа от этой точки функция $f$ имеет разные направления выпуклости.

Так, например, точка $O(0, 0)$ является точкой перегиба функции $y = x^3$. Поскольку $y'' = 6x$ и $y'' < 0$, $x \in (-\infty, 0)$, и $y'' > 0$, $x \in (0, +\infty)$, то на промежутке $(-\infty, 0)$ функция $y = x^3$ выпуклая вверх, а на $(0, +\infty)$ — выпуклая вниз и точка $x = 0$ является точкой, разделяющей промежутки выпуклости разной направленности.

**Теорема 4.18 (необходимое условие точки перегиба).** *Пусть точка $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$ является точкой перегиба функции $f$. Тогда если в точке $x_0$ функция $f$ имеет вторую производную, то $f''(x_0) = 0$.*

Таким образом, условие $f''(x) = 0$ играет такую же роль в отношении точек перегиба, как условие $f'(x) = 0$ — в отношении точек локального экстремума. Оно необходимо, но не достаточно. Так, например, функция $f(x) = x^4$ имеет вторую производную $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$, но точка $O(0, 0)$ не является точкой перегиба функции, поскольку $f''(x) \geqslant 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, и функция $f$ выпуклая вниз на $(-\infty, +\infty)$.

Не будем проводить доказательство теоремы 4.18. Заметим лишь, что, например, при условии существования непрерывной второй производной в окрестности точки $x_0$ является вполне естественным ее равенство нулю в этой точке, так как с одной стороны от точки $x_0$ $f''(x) \leqslant 0$, а с другой стороны от $x_0$ $f''(x) \geqslant 0$.

**Теорема 4.19 (достаточное условие точки перегиба).** *Пусть функция $f$ имеет вторую производную $f''(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0$. Тогда если вторая производная $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки $x_0$, то точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $f$.*

Действительно, если производная $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки $x_0$, то по теореме 4.17 это означает, что функция $f$ является выпуклой с разной направленностью слева и справа от точки $x_0$, т.е. точка $(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба графика функции $f$.

### 4.4.6. Асимптоты графика функции

**Определение 4.19.** Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ либо $-\infty$.

Так, график функции $y = 1/x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, потому что

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Пусть теперь функция $f$ определена на промежутке $(a, +\infty)$.

**Определение 4.20.** Прямая $y = kx + l$ называется *наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если функция $f$ представима в виде

$$f(x) = kx + l + \alpha(x), \tag{4.29}$$

где $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to +\infty$.

Очевидно, что и в случае вертикальной асимптоты, и в случае наклонной асимптоты характерным признаком является неограниченное сближение графика функции и прямой, являющейся асимптотой.

**Теорема 4.20.** *Для того чтобы график функции $f$ имел наклонную асимптоту при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = l. \tag{4.30}$$



Доказательство. *Необходимость.* Пусть график функции $f$ имеет асимптоту $y = kx + l$ при $x \to +\infty$, т.е. справедливо соотношение (4.29). Тогда из этого соотношения имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + l + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{l}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (l + \alpha(x)) = l.$$

*Достаточность.* Пусть существуют пределы (4.30). Из второго равенства имеем, что $f(x) - kx = l + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to +\infty$. Это означает, что равенство (4.29) имеет место. □

*Замечание* 4.1. Если предел

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

конечен, то

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

и наклонная асимптота имеет вид $y = l$, где

$$l = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

В этом случае наклонная асимптота называется *горизонтальной*.

Аналогично определяется наклонная асимптота и доказывается соответствующая теорема для случая $x \to -\infty$. При этом равенства (4.30) следует заменить на равенства

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = l.$$

Пример 4.17. Найти наклонные асимптоты графика функции

$$y = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Решение. Наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ найдем, применив теорему 4.20. Имеем:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1,$$

$$l = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0.$$

Значит, $y = x$ — наклонная асимптота при $x \to +\infty$.

Для нахождения наклонной асимптоты при $x \to -\infty$ поступим аналогичным образом:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -1,$$
$$l = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0.$$

Значит, $y = -x$ — наклонная асимптота при $x \to -\infty$. □

Приведенный пример показывает, что наклонные асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть разными.

### 4.4.7. Общая схема исследования поведения функций и построения графиков функций

Для полного исследования поведения функций и построения их графиков можно рекомендовать следующую схему:

1) найти область определения функции;
2) найти точки разрыва функции, вертикальные асимптоты (если они существуют), точки пересечения с осями координат;
3) определить четность (нечетность) и периодичность функции;
4) найти промежутки монотонности функции и точки локального экстремума;
5) определить промежутки выпуклости функции и точки перегиба;
6) выяснить вопрос о существовании наклонных асимптот;
7) на основании полученных данных построить график функции (иногда полученные данные сводят в таблицу).

Рассмотрим пример, иллюстрирующий приведенную схему.

Пример 4.18. Построить график функции $y = e^{-x^2}$.



Р е ш е н и е. 1. Областью определения данной функции является вся числовая прямая.

2. Функция непрерывна на $\mathbb{R}$. Вертикальных асимптот не имеет.

График функции не пересекает ось $Ox$, так как $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Если $x = 0$, то $y = 1$, и график функции пересекает ось $Oy$ в точке $(0, 1)$.

3. Функция является четной, так как

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Свойством периодичности функция не обладает.

4. Найдем производную функции: $y' = -2xe^{-x^2}$. Очевидно, что $y'(x) > 0$, $x \in (-\infty, 0)$, и $y'(x) < 0$, $x \in (0, +\infty)$.

Следовательно, функция является возрастающей на промежутке $(-\infty, 0)$ и убывающей на $(0, +\infty)$.

Стационарной точкой является только точка $x = 0$. Из теоремы 4.15 следует, что точка $x = 0$ является точкой локального максимума, $y(0) = 1$.

5. Найдем вторую производную:

$$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Найдем точки, в которых вторая производная обращается в нуль, т.е. точки возможного перегиба:

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0, \quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует:

$$y''(x) > 0, \quad x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right),$$
$$y''(x) < 0, \quad x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Таким образом, функция $y = e^{-x^2}$ является выпуклой вниз на промежутках $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2}, +\infty)$ и выпуклой вверх на $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Значит, точки $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$ являются точками перегиба.

6. Выясним вопрос о существовании наклонных асимптот:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^{x^2}}=0,$$
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x^2}=0.$$

Следовательно, прямая $y=0$ (ось $Ox$) является горизонтальной асимптотой при $x\to+\infty$. Очевидно, что эта прямая является асимптотой и при $x\to-\infty$.

7. Для построения графика полученные результаты сведем в табл. 4.1.

Таблица 4.1

| $x$ | $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ | 0 | $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | + | $e^{-1/2}$ | + | 1 | + | $e^{-1/2}$ | + |
| $y'$ | + | + | + | 0 | − | − | − |
| $y''$ | + | 0 | − | − | − | 0 | + |

На основании полученных данных строим график (рис. 4.8).

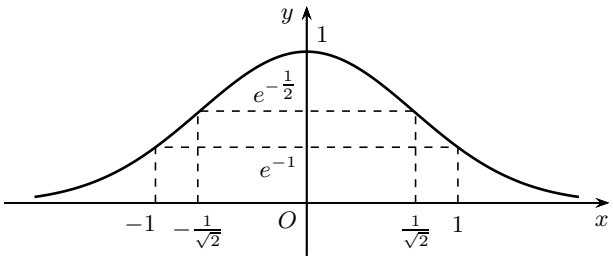


**Рис. 4.8**

Полученная кривая называется *кривой Гаусса*. Заметим также, что в силу четности функции и симметричности графика относительно оси $Oy$ можно было исследовать функцию лишь на промежутке $(0,\infty)$. □

# Глава 5

# Теория интегрирования

## 5.1. Неопределенный интеграл

### 5.1.1. Первообразная

Как было сказано в предыдущей главе, для приложений производная имеет важное значение с точки зрения поиска скорости протекания процесса. Естественным образом возникает следующая задача: как, зная скорость изменения некоторого процесса, описать сам процесс? Иными словами, как, зная производную некоторой функции, восстановить саму функцию?

**Определение 5.1.** Функция $F$, определенная на интервале $(a,b)$, называется *первообразной* для функции $f$ на этом же интервале, если для всех $x\in(a,b)$ $F'(x)=f(x)$.

Пример 5.1. Найти первообразную для функции $f(x)=2x$.

Решение. Используя таблицу производных, легко подобрать функцию $F(x)$ таким образом, что $F'(x)=2x$. Например, $F(x)=x^2$. Однако, используя то, что производная константы равна нулю, в качестве первообразной для функции $f(x)=2x$ можно взять и $F_1(x)=x^2+1$, и $F_2(x)=x^2-2$. □

Учитывая пример, можно заключить, что задача об отыскании первообразной по данной функции $f$ решается неоднозначно. Если, например, $F$ есть первообразная для функции $f$, то функция $F(x)+C$ также является первообразной для функции $f$. Действительно,

$$(F(x)+C)'=F'(x)+(C)'=f(x)+0=f(x).$$

В частности, функция $x^2 + C$, где $C$ — произвольная постоянная, есть первообразная для функции $2x$ на $\mathbb{R}$.

**Теорема 5.1.** *Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a, b)$, то множество всех первообразных задается формулой*

$$F(x) + C,$$

*где $C$ — произвольная постоянная.*

Доказательство. Вначале покажем, что функция $F(x)+C$ является первообразной для функции $f(x)$, т.е.

$$(F(x) + C)' = f(x).$$

Этот факт следует непосредственно из того, что $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, и правил дифференцирования:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x).$$

Теперь покажем, что никакая другая функция, кроме указанных, не может являться первообразной для функции $f(x)$. Действительно, пусть некоторая функция $\Phi(x)$ является первообразной функции $f(x)$, т.е. $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Окончательно, применяя условие постоянства функции, получим:

$$\Phi(x) - F(x) = C \;\Rightarrow\; \Phi(x) = F(x) + C. \qquad \square$$

Таким образом, если известна хотя бы одна первообразная для данной функции $f$, то известно и все множество первообразных для этой функции.

### 5.1.2. Неопределенный интеграл

**Определение 5.2.** *Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных этой функции. Обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, $x$ — *переменной интегрирования*.



Используя теорему 5.1, заключаем, что

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

*Замечание* 5.1. Всякая непрерывная функция на множестве $X$ имеет на этом множестве первообразную, а значит, и неопределенный интеграл.

**Определение 5.3.** График каждой первообразной называется *интегральной кривой*.

Заметим, что интегральная кривая $F(x) + C$ получается из интегральной кривой $F(x)$ параллельным переносом вдоль оси $Oy$ на $C$ единиц (рис. 5.1).

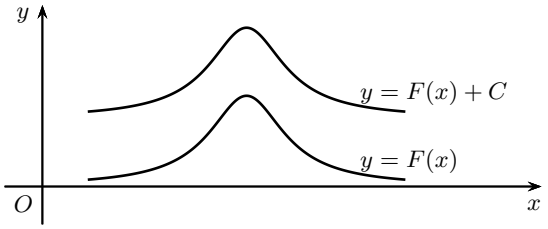


**Рис. 5.1**

*Геометрический смысл неопределенного интеграла* состоит в том, что неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых, получаемых друг из друга параллельным переносом вдоль оси $Oy$.

#### Свойства неопределенного интеграла

**1.** *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

Доказательство. В силу определения неопределенного интеграла и производной суммы имеем:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x)+C' = f(x). \qquad \square$$

**2.** *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.*

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Доказательство. Используя то, что дифференциал функции $y = f(x)$ находится по формуле $dy = f'(x)\,dx$, получаем:

$$d\int f(x)\,dx = d(F(x)+C) = dF(x)+d(C) = F'(x)dx = f(x)\,dx. \qquad \square$$

**3.** *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т.е.*

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

Доказательство. В соответствии со свойствами дифференциала и определением первообразной будем иметь:

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

Из этого свойства, в частности, следует, что

$$\int dx = x+C. \qquad \square$$

**4.** *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $k = \text{const} \neq 0$, то*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$



Доказательство. Пусть $F$ есть первообразная для функции $f$, т.е. $F'(x) = f(x)$. Поскольку

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x),$$

то функция $kF$ будет первообразной для функции $kf$. Значит,

$$\int kf(x)\,dx = kF(x)+C = k(F(x)+C_1) = k\int f(x)\,dx$$

(здесь $C_1 = \dfrac{1}{k}C$ — некоторая постоянная). $\square$

**5.** *Неопределенный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций, т.е.*

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $F$ и $G$ — первообразные для функций $f$ и $g$, т.е.

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x).$$

Поскольку

$$(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x),$$

то функция $F+G$ является первообразной для функции $f+g$. Следовательно,

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x)+C_1+G(x)+C_2 =$$
$$= (F(x)+G(x))+(C_1+C_2) = \int (f(x)+g(x))\,dx. \qquad \square$$

*Замечание* 5.2. Из свойств 4 и 5 следует равенство

$$\int (af(x)+bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx, \quad a,b\in\mathbb{R}.$$

### 5.1.3. Таблица интегралов

Приведем *таблицу основных интегралов*, часть формул которой является непосредственным следствием из определения неопределенных интегралов и таблицы производных. Другую часть формул проверим ниже.

1) $\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1,$
приведем также некоторые наиболее часто встречающиеся частные случаи этой формулы при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1/2$ и $a = -2$ соответственно:

а) $\int dx = x + C,$ в) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C,$

б) $\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} + C,$ г) $\int \dfrac{1}{x^2}\,dx = -\dfrac{1}{x} + C;$

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1;$ 4) $\int e^x\,dx = e^x + C;$

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$ 6) $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$ 8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

9) $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$

11) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0;$

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C, \quad a \neq 0;$

13) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C, \quad a \neq 0.$



Проверим, например, справедливость формул 11 и 12. Покажем, что производная правой части этих формул равна подынтегральной функции левой части (при $a \neq 0$). Для формулы 11 имеем:

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\right)' = \frac{1}{2a}\,\frac{1}{\dfrac{x-a}{x+a}}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)' =$$
$$= \frac{1}{2a}\,\frac{x+a}{x-a}\,\frac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2} = \frac{1}{2a}\,\frac{2a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}.$$

В случае формулы 12 получим:

$$\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-a^2}}\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)' =$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2-a^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Остальные формулы проверяются аналогично путем дифференцирования правой части.

Следует отметить существенное различие в операциях дифференцирования и интегрирования. Операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций, а именно: производная элементарной функции снова есть элементарная функция. Иначе обстоит дело с интегрированием. Существуют элементарные функции, первообразная которых не выражается через элементарные функции. Такими являются, например, интегралы:

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \cos x^2\,dx, \quad \int \sin x^2\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

### 5.1.4. Простейшие методы интегрирования

Часто под знаком интеграла может оказаться функция, для которой не имеется табличного интеграла и непосредственное интегрирование невозможно. Тогда применяются другие методы интегрирования, в частности метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

### Метод интегрирования подстановкой (замена переменной)

**Теорема 5.2.** *Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на интервале $(\alpha, \beta)$ и $(a, b)$ — множество ее значений. Пусть функция $y = f(x)$ определена на $(a, b)$ и имеет на этом промежутке первообразную. Тогда справедлива формула*

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Тогда

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = (F(x)+C)\Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C. \tag{5.2}$$

Теперь рассмотрим на промежутке $T$ сложную функцию $F(\varphi(t))$. По теореме 4.4

$$(F(\varphi(t)))' = F'(x)\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t),$$

т.е. функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(x)\varphi'(t)$ и

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{5.3}$$

Сравнивая правые части формул (5.2) и (5.3), получаем требуемую формулу. □

Пример 5.2. Вычислить интеграл $\int \ln^5 x\,\dfrac{dx}{x}$.

Решение. В таблице основных интегралов этот интеграл отсутствует. Поэтому в данном случае постараемся подобрать подходящую замену переменной, чтобы прийти к табличному интегралу. Положим $\ln x = t$ , т.е. $x = e^t$. Тогда

$$dx = d(e^t) = (e^t)'\,dt = e^t\,dt,$$

и по формуле (5.1) имеем:

$$\int \ln^5 x\,\frac{dx}{x} = \int t^5 \frac{1}{e^t} e^t\,dt = \int t^5\,dt = \frac{t^6}{6} + C.$$



Вернемся к переменной $x$:

$$\int \ln^5 x \frac{dx}{x} = \frac{\ln^6 x}{6} + C.$$

Отметим, что иногда, как в этом примере, первоначально удобно задавать не $x$ как функцию $t$, а, наоборот, задавать $t$ как функцию $x$.

Теперь рассмотрим несколько другой подход к решению этого примера. Заметив, что $1/x = (\ln x)'$ , получим:

$$\int \ln^5 x \frac{dx}{x} = \int \ln^5 x (\ln x)'\,dx = \int \ln^5 x\,d\ln x = \frac{1}{6}(\ln x)^6 + C.$$

На последнем шаге мы неявно воспользовались заменой $\ln x = t$. □

*Замечание* 5.3. Если $F$ есть первообразная для функции $f$, то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a, b \in R, \quad a \neq 0.$$

Доказательство. В рассматриваемом интеграле сделаем замену:

$$ax + b = t, \quad x = \frac{1}{a}t - b, \quad dx = \frac{1}{a}\,dt,$$

тогда

$$\int f(ax+b)\,dx = \int f(t)\frac{1}{a}\,dt = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt = \\ = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \quad \square$$

Пример 5.3. Вычислить интеграл $\int \cos(5x-3)\,dx$.

Решение. Обратим внимание на интеграл 6 таблицы основных интегралов:

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

Учитывая замечание 5.3 ($a = 5$, $b = 3$), получаем:

$$\int \cos(5x-3)\,dx = \frac{1}{5}\sin(5x-3) + C. \quad \square$$

**Метод интегрирования по частям**

**Теорема 5.3.** *Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на интервале $(a, b)$. Тогда справедлива формула*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx. \tag{5.4}$$

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Отсюда получим:

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x). \tag{5.5}$$

Поэтому

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \int \big((u(x)v(x))' - u'(x)v(x)\big)\,dx =$$
$$= \int (u(x)v(x))'\,dx - \int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx. \quad \square$$

Учитывая, что $u'(x)\,dx = du$ и $v'(x)\,dx = dv$, формулу (5.4) можно записать в виде

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{5.6}$$

Пример 5.4. Вычислить интеграл $\int xe^x\,dx$.

Решение. Основная трудность применения интегрирования по частям состоит в правильном выборе функций $u$ и $v$, т.е. в таком выборе, чтобы интеграл справа в формуле (5.4) или (5.6) оказался проще, чем интеграл слева. В данном случае удобно положить $x = u$, $e^x\,dx = dv$. Найдем функцию $v$ (точнее, одну из функций $v$):

$$\int dv = \int e^x\,dx, \quad v = e^x.$$



Применив формулу (5.6), получим:

$$\int xe^x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C. \quad \square$$

При наличии определенных навыков интегрирования по частям можно не выписывать функции $u$ и $v$, а только подразумевать их. Например,

$$\int xe^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

**Интегрирование простейших рациональных дробей**

**Определение 5.4.** *Простейшими рациональными дробями* назовем следующие функции:

1) $\dfrac{A}{x-a}$;
2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $\quad k > 1,\ k \in \mathbb{N}$;
3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+2px+q}\,dx$, $\quad p^2 - q < 0$;
4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^k}\,dx$, $\quad k > 1,\ k \in \mathbb{N},\ p^2 - q < 0$.

С помощью приведенных выше методов можно найти интегралы от указанных рациональных дробей.

**Интегрирование простейших рациональных дробей**

**1.** $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C.$

Доказательство. С помощью таблицы интегралов (интеграл 2) получим

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C. \quad \square$$

**2.** $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$

Доказательство. С помощью таблицы интегралов (интеграл 1) получим

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = -\frac{A}{k-1}(x-a)^{-k+1} + C =$$
$$= -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, \quad k>1. \quad \square$$

**3.** $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+2px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln|x^2+2px+q| + \frac{N-Mp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C.$

Доказательство. Выделим в трехчлене

$$x^2+px+q$$

полный квадрат:

$$x^2+2px+q = (x+p)^2 + q - p^2 = (x+p)^2 + h^2,$$

где $h^2 = q-p^2 > 0$ (считаем $h>0$).

Теперь сделаем замену

$$x+p=t, \quad x=t-p, \quad dx=dt$$

и получим:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+2px+q}\,dx = \int \frac{M(t-p)+N}{t^2+h^2}\,dt =$$
$$= M\int \frac{t\,dt}{t^2+h^2} + (N-Mp)\int \frac{dt}{t^2+h^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{(t^2+h^2)'\,dt}{t^2+h^2} + (N-Mp)\frac{1}{h}\int \frac{d\frac{t}{h}}{1+\frac{t^2}{h^2}} =$$
$$= \frac{M}{2}\ln|t^2+h^2| + (N-Mp)\frac{1}{h}\operatorname{arctg}\frac{t}{h} + C =$$
$$= \frac{M}{2}\ln|x^2+2px+q| + \frac{N-Mp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C. \quad \square$$



**4.** $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^k}\,dx.$

Доказательство. Выделим полный квадрат в знаменателе и сделаем замену $x+p=t$. Будем иметь:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^k}\,dx = \int \frac{Mx+N}{\big((x+p)^2+h^2\big)^k}\,dx =$$
$$= \int \frac{M(t-p)+N}{\big(t^2+h^2\big)^k}\,dt = M\int \frac{t\,dt}{\big(t^2+h^2\big)^k} + (N-Mp)\int \frac{dt}{\big(t^2+h^2\big)^k}.$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства легко вычисляется:

$$\int \frac{t\,dt}{\big(t^2+h^2\big)^k} = \frac{1}{2}\int \big(t^2+h^2\big)^{-k}\,d\big(t^2+h^2\big) = \frac{1}{2(1-k)\big(t^2+h^2\big)^{k-1}} + C.$$

Для нахождения второго интеграла сначала введем обозначение

$$J_k = \int \frac{dt}{\big(t^2+h^2\big)^k}.$$

Тогда

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+h^2)^k} = \frac{1}{h^2}\int \frac{(t^2+h^2)-t^2}{(t^2+h^2)^k}\,dt =$$
$$= \frac{1}{h^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+h^2)^k}\right) =$$
$$= \frac{1}{h^2}\left(J_{k-1} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+h^2)^k}\right). \qquad (5.7)$$

К последнему интегралу применим метод интегрирования по частям (см. формулу (5.6)). При этом

$$u=t, \quad dv = \frac{t\,dt}{(t^2+h^2)^k}.$$

Тогда $du=dt$ и

$$v = \frac{1}{2}\int (t^2+h^2)^{-k}\,d(t^2+h^2) = \frac{1}{2(1-k)\big(t^2+h^2\big)^{k-1}}.$$

Значит,

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+h^2)^k} = \frac{t}{2(1-k)(t^2+h^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^{k-1}} = \\ = \frac{t}{2(1-k)(t^2+h^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\,J_{k-1}.$$

Подставив последнее соотношение в равенство (5.7), получим:

$$J_k = \frac{1}{h^2}\left(J_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+h^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)}\,J_{k-1}\right)$$

или

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+h^2\right)^k} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+h^2)^{k-1}}\right). \qquad (5.8)$$

Формула (5.8) позволяет найти интеграл $J_k$ для любого натурального числа $k > 1$. □

Пример 5.5. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{x^2+2x+5}$.

Р е ш е н и е. Можно воспользоваться результатом вычислений, проведенных в п. 3, положив

$$M = 0, \quad N = 1, \quad p = 1, \quad q = 5.$$

Однако проще непосредственно интегрировать, используя аналогичные приемы.

Выделив полный квадрат, получим:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+4}.$$

Сделаем замену $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t/2)}{1+(t/2)^2} = \\ = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C. \quad \square$$



Пример 5.6. Найти интеграл

$$\int \frac{3x-5}{x^2-6x+10}\,dx.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\int \frac{3x-5}{x^2-6x+10}\,dx = \int \frac{3x-5}{(x-3)^2+1}\,dx = \left|\begin{array}{l} x-3=t, \\ x=t+3, \\ dx=dt \end{array}\right| = \\ = \int \frac{3(t+3)-5}{t^2+1}\,dt = \int \frac{3t+4}{t^2+1}\,dt = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+1} + 4\int \frac{dt}{t^2+1} = \\ = \frac{3}{2}\ln(t^2+1) + 4\operatorname{arctg} t + C = \\ = \frac{3}{2}\ln(x^2-6x+10) + 4\operatorname{arctg}(x-3) + C. \quad \square$$

Пример 5.7. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся реккурентным соотношением (5.8) при $h=1$. Получим:

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}J_1 + \frac{x}{2(2-1)(x^2+1)^{2-1}} = \\ = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C,$$

$$J_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 3-2}J_2 + \frac{x}{2(3-1)(x^2+1)^{3-1}} = \\ = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)}\right) + \frac{x}{4(x^2+1)^2} + C. \quad \square$$

## 5.2. Интегрирование некоторых классов функций

### 5.2.1. Интегрирование рациональных функций

Ознакомимся с методами интегрирования рациональных функций, т.е. функций вида $P(x)/Q(x)$, где $P$ и $Q$ — алгебраические многочлены:

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$
$$Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n.$$

Если $m < n$, то рациональная функция называется *правильной*. Если $m \geqslant n$, то рациональная функция называется *неправильной*.

В случае неправильной рациональной функции производят деление и получают:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $S(x)$ — некоторый многочлен; $P_1(x)/Q(x)$ — правильная рациональная функция.

Например,

$$\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+1} = \frac{(x^3+x)+2x^2+2-1}{x^2+1} = x+2-\frac{1}{x^2+1}.$$

Поэтому в дальнейшем будем полагать, что $P(x)/Q(x)$ есть правильная рациональная функция.

Можно доказать, что любой многочлен преобразовывается к произведению простейших многочленов, а именно:

$$Q_n(x) = A(x-x_1)^{l_1}(x-x_2)^{l_2}\ldots(x-x_r)^{l_r}(x^2+2p_1x+q_1)^{t_1}\times \\ \times (x^2+2p_2x+q_2)^{t_2}\ldots(x^2+2p_sx+q_s)^{t_s}, \quad (5.9)$$

где

$$x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}; \quad l_1, l_2, \ldots, l_r \in \mathbb{N}; \quad t_1, t_2, \ldots, t_s \in \mathbb{N};$$
$$p_i^2 - q_i < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$



Последнее означает, что многочлены $x^2 + 2p_ix + q_i$ не имеют действительных корней. Этот факт устанавливается в расширенном курсе высшей математики.

Примем без доказательства следующее утверждение: если отношение $P(x)/Q(x)$ есть правильная рациональная функция и многочлен $Q(x)$ имеет вид (5.9), то ее можно единственным образом представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{l_1}\frac{A_k^{(1)}}{(x-x_1)^k} + \sum_{k=1}^{l_2}\frac{A_k^{(2)}}{(x-x_2)^k} + \ldots + \sum_{k=1}^{l_r}\frac{A_k^{(r)}}{(x-x_r)^k} + \\ + \sum_{k=1}^{t_1}\frac{M_k^{(1)}+N_k^{(1)}}{(x^2+2p_1x+q_1)^k} + \\ + \sum_{k=1}^{t_2}\frac{M_k^{(2)}+N_k^{(2)}}{(x^2+2p_2x+q_2)^k} + \ldots + \sum_{k=1}^{t_s}\frac{M_k^{(s)}+N_k^{(s)}}{(x^2+2p_sx+q_s)^k}, \quad (5.10)$$

где $A_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$, $N_k^{(i)}$ — некоторые вещественные числа.

Выражение (5.10) называется *разложением на простейшие рациональные дроби*. Поскольку ранее мы рассмотрели методы интегрирования таких дробей, то, имея разложение (5.10), легко найти неопределенный интеграл от рациональной функции $P(x)/Q(x)$. Этот интеграл будет выражаться через рациональные функции, логарифмы и арктангенсы.

Таким образом, главная задача при интегрировании рациональных функций состоит в нахождении разложения (5.10). Если известно представление (5.9), то коэффициенты $A_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$, $N_k^{(i)}$ можно искать методом неопределенных коэффициентов. Суть этого метода состоит в следующем. Записывают представление (5.10) с неопределенными коэффициентами $A_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$, $N_k^{(i)}$. Затем выражение в правой части приводят к общему знаменателю и получают в числителе некоторый многочлен. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях у этого многочлена $P(x)$, получают систему уравнений для определения коэффициентов $A_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$, $N_k^{(i)}$. Решив ее, находят эти коэффициенты.

Отметим также, что для поиска неизвестных коэффициентов можно использовать и другие приемы, например метод частных значений.

Проиллюстрируем изложенное на примерах.

Пример 5.8. Найти разложение на простейшие дроби рациональной функции

$$R(x) = \frac{x}{(x+1)(x-2)(x^2+1)}.$$

Р е ш е н и е. Очевидно, что $R(x)$ есть правильная рациональная функция, знаменатель которой имеет вид (5.9). Поэтому запишем представление (5.10) с неопределенными коэффициентами для данной рациональной функции:

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Правую часть равенства приводим в общему знаменателю и сравниваем многочлены, стоящие в числителях левой и правой частей:

$$x = A(x-2)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Mx+N)(x+1)(x-2), \quad (5.11)$$

или

$$x = (A+B+M)x^3 + (-2A+B+N-M)x^2 + \\ + (A+B-2M-N)x - 2A + B - 2N.$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях $x$. Приравнивая эти коэффициенты, получаем систему уравнений для определения чисел $A, B, M, N$:

$$\begin{aligned} &\text{при } x^3: && A + B + M = 0; && (5.12)\\ &\text{при } x^2: && -2A + B + N - M = 0;\\ &\text{при } x^1: && A + B - 2M - N = 1;\\ &\text{при } x^0: && -2A + B - 2N = 0. && (5.13) \end{aligned}$$

Решая систему из этих четырех линейных уравнений, находим неизвестные $A, B, M, N$.

Вместе с тем, используя тождество (5.11), можно найти искомые коэффициенты несколько проще.



Полагая в формуле (5.11) $x = -1$, получаем $-1 = A(-3) \cdot 2$, откуда $A = 1/6$. Полагая в (5.11) $x = 2$, получаем $2 = B \cdot 3 \cdot 5$, откуда $B = 2/15$. Тогда из уравнения (5.12) находим:

$$M = -A - B = -\frac{1}{6} - \frac{2}{15} = -0,3,$$

а из уравнения (5.13)

$$N = \frac{B}{2} - A = \frac{1}{15} - \frac{1}{6} = -0,1.$$

Таким образом,

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{15(x-2)} - 0,1\frac{3x+1}{x^2+1}. \qquad \square$$

Пример 5.9. Найти разложение на простейшие дроби рациональной функции

$$\frac{2x+1}{(x^2+5x+6)(x+2)}.$$

Р е ш е н и е. Данная рациональная функция является правильной. Корнями многочлена $x^2 + 5x + 6$ являются числа $(-2)$ и $(-3)$. Поэтому $(x^2+5x+6)(x+2) = (x+2)^2(x+3)$.

Теперь можем записать следующее представление с неопределенными коэффициентами, аналогичное формуле (5.10):

$$\frac{x}{(x+2)^2(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+3}.$$

Приводя выражение справа к общему знаменателю и сравнивая многочлены, стоящие в числителе, находим:

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+3) + C(x+2)^2.$$

Полагая здесь $x = -2$, находим: $-2 = B(-1)$, $B = -2$. Если положить $x = -3$, то имеем: $-3 = C(-1)^2$, $C = -3$. Наконец, если $x = 0$, то получаем: $6A + 3B + 4C = 0$ и $A = -(3B + 4C)/6 = 3$. Значит,

$$\frac{x}{(x^2+5x+6)(x+2)} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} - \frac{3}{x+3}. \qquad \square$$

### 5.2.2. Интегрирование иррациональных функций

#### Простейшие случаи

Через $R(u,v)$ будем обозначать рациональную функцию двух переменных, т.е. функцию, получающуюся из двух переменных $u$ и $v$ и некоторых постоянных, над которыми производятся операции сложения, вычитания, умножения и деления. Например, функция

$$\frac{u^2v^2+3u^2v+uv^2+uv+1}{u^2v+u^2+2}$$

есть рациональная функция двух переменных $u$ и $v$.

Пусть имеем интеграл вида

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx, \tag{5.14}$$

где $n\in\mathbb{N}$; $ad-bc\neq 0$.

В интегралах такого вида целесообразно сделать следующую замену:

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t. \tag{5.15}$$

Из этого равенства получаем:

$$t^n=\frac{ax+b}{cx+d},\qquad x=\frac{b-dt^n}{ct^n-a},\qquad dx=\frac{m(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}dt.$$

Подставляя соответствующие выражения в (5.14), имеем:

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=$$
$$=\int R\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a},t\right)\frac{m(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\,dt=\int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ есть некоторая функция переменной $t$.

Таким образом, интегралы вида (5.14) заменой переменной (5.15) сводятся к интегралам от рациональных функций, методы вычислений которых нам уже известны. В этом случае говорят, что интеграл вида (5.14) рационализируется.



Пример 5.10. Найти интеграл $\int\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

Р е ш е н и е. Сделаем замену переменной $\sqrt{x+1}=t$. Имеем:

$$x+1=t^2,\quad x=t^2-1,\quad dx=2t\,dt,$$

тогда

$$\int\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int\frac{t^2-1-1}{t}2t\,dt=2\int(t^2-2)\,dt=2\left(\frac{t^3}{3}-2t\right)+C=$$
$$=2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}-2\sqrt{x+1}\right)+C=\frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-5)+C.\quad\square$$

По аналогии с интегралом (5.14) рассмотрим более общие случаи интегрирования иррациональных функций.

Интеграл вида

$$\int R\left(x,x^{\frac{r_1}{s_1}},x^{\frac{r_2}{s_2}},\ldots,x^{\frac{r_k}{s_k}}\right)dx$$

рационализируется заменой $x=t^m$, где $m=\text{НОК}\,(s_1,s_2,\ldots,s_k)$ (НОК — наименьшее общее кратное).

Пример 5.11. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Р е ш е н и е. Поскольку

$$\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{x^{\frac12}}{1+x^{\frac13}},$$

то в этом случае $m=\text{НОК}\,(2,3)=6$. Поэтому следует сделать замену $x=t^6$. Тогда $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $dx=6t^5\,dt$ и

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx=\int\frac{t^3}{1+t^2}\,6t^5\,dt=6\int\frac{t^8}{1+t^2}\,dt.$$

Далее воспользуемся методами интегрирования рациональных функций:

$$\int \frac{t^8}{1+t^2}\,dt = \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \\ = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C.$$

Возвращаясь к переменной $x$ ($t = \sqrt[6]{x}$), окончательно получаем:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C. \quad \square$$

Интеграл вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_k}{s_k}}\right) dx$$

рационализируется заменой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

где $m = \text{НОК}\,(s_1, s_2, \ldots, s_k)$.

Пример 5.12. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}\,dx$.

Р е ш е н и е. Поступая так же, как и в примере 5.11, замечаем, что в данном случае следует произвести замену $x+1 = t^6$. Получим:

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int \frac{t^3 - t^2}{t^3 + t^2}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{t^6 - t^5}{t+1}\,dt = \\ = 6\int \left(t^5 - 2t^4 + 2t^3 - 2t^2 + 2t - 2 + \frac{2}{t+1}\right) dt = \\ = 6\left(\frac{t^6}{6} - 2\,\frac{t^5}{5} + 2\,\frac{t^4}{4} - 2\,\frac{t^3}{3} + 2\,\frac{t^2}{2} - 2t + 2\ln|t+1|\right) + C = \\ = x - \frac{12}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5} + 3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 4\sqrt{x+1} + 6\sqrt[3]{x+1} - \\ - 12\sqrt[6]{x+1} + 12\ln(\sqrt[6]{x+1} + 1) + C. \quad \square$$



**Более сложные случаи**

1. *Тригонометрическая подстановка.* Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$$

находятся с помощью замены

$$x = a\sin t \quad \text{или} \quad x = \cos t.$$

При вычислении интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$$

можно воспользоваться подстановкой

$$x = a\operatorname{tg} t.$$

Для нахождения интеграла вида

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$$

применяется замена

$$x = \frac{a}{\sin t}.$$

Пример 5.13. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$.

Р е ш е н и е. Сделаем замену $x = 2\sin t$. Тогда

$$dx = 2\cos t\,dt, \quad \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2\cos t.$$

Получим:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t}\,2\cos t\,dt = \int \operatorname{ctg}^2 t\,dt = \\ = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) dt = \int \frac{1}{\sin^2 t}\,dt - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C = \\ = -\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) - \arcsin\frac{x}{2} + C. \quad \square$$

2. *Подстановки Эйлера.* Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

находятся с помощью так называемых подстановок Эйлера.

Если $a > 0$, то полагают

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$$

(комбинация знаков произвольна).

Если $c > 0$, то полагают

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

(комбинация знаков произвольна).

Если же $a < 0$ и $c < 0$ (в этом случае $b^2-4ac > 0$, т.е. квадратный трехчлен $ax^2+bx+c$ имеет два корня), то применяют подстановку

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1),$$

где $x_1$ — один из корней трехчлена $ax^2+bx+c$.

Пример 5.14. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

Р е ш е н и е. Так как $a > 0$, то воспользуемся первой подстановкой Эйлера $\sqrt{x^2+x+1} = x - t$. Тогда

$$x = \frac{t^2-1}{2t+1}, \quad dx = \frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}\,dt.$$

Значит,

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \int \frac{2t^2+2t+2}{t(2t+1)^2}\,dt.$$

Это интеграл от рациональной функции. Применив метод неопределенных коэффициентов, несложно получить

$$\frac{2t^2+2t+2}{t(2t+1)^2} = \frac{2}{t} - \frac{3}{2t+1} - \frac{3}{(2t+1)^2}.$$



Поэтому

$$\int \frac{2t^2+2t+2}{t(2t+1)^2}\,dt = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t+1| + \frac{3}{2(2t+1)} + C.$$

Осталось произвести обратную замену, т.е. $t = x - \sqrt{x^2+x+1}$. □

3. *Интегрирование дифференциального бинома.*

**Определение 5.5.** Выражение $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ называется *дифференциальным биномом.*

Для того чтобы рационализировать интеграл

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

применяются следующие подстановки:

1) если $p \in \mathbb{Z}$, то
$$x = t^k,$$
где $k$ — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $m$ и $n$;

2) если $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то
$$a + bx^n = t^s,$$
где $s$ — знаменатель дроби $p$;

3) если $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то
$$a + bx^n = x^n t^s,$$
где $s$ — знаменатель дроби $p$.

Во всех остальных случаях интегралы от дифференциального бинома не выражаются через элементарные функции, т.е. не берутся.

Пример 5.15. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\,dx.$$

В этом случае $m=-1/2$, $n=1/4$, $p=1/3$. Поскольку

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2,$$

то сделаем замену $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3$. При этом

$$x=(t^3-1)^4, \quad dx = 12t^2(t^3-1)^3\,dt, \quad t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}.$$

Тогда

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\,dx = \int \frac{t}{(t^3-1)^2}\,12t^2(t^3-1)^3\,dt = 12\int (t^6-t^3)\,dx = \\ = \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C = \frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}} - 3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}} + C. \quad \square$$

### 5.2.3. Тригонометрические интегралы

Пусть имеем интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx, \tag{5.16}$$

где $R(u,v)$ — рациональная функция двух переменных $u$ и $v$. В этом случае функцию $R(\sin x, \cos x)$ называют *тригонометрической рациональной функцией.*

Интеграл (5.16) рационализируется с помощью замены переменной

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}. \tag{5.17}$$

Действительно,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{5.18}$$



и

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция переменной $t$.

Пример 5.16. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

Р е ш е н и е. Положим $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда, воспользовавшись формулами (5.18), имеем

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{dt}{2(1+t^2)+1-t^2} = \\ = 2\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C. \quad \square$$

На практике замена переменной (5.17) часто приводит к громоздким выкладкам. При определенных условиях более удобны другие замены переменной:

а) если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то полагают $t=\cos x$;

б) если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то полагают $t=\sin x$;

в) если $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то полагают $t=\operatorname{tg} x$.

В частности, рассмотрим вычисление интеграла вида

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx, \quad m,n\in\mathbb{Z}.$$

Возможны следующие случаи:

1) если $n$ — нечетное число, то применяется замена $\sin x = t$;
2) если $m$ — нечетное число, то применяется замена $\cos x = t$;
3) если $m$ и $n$ — четные числа, то применяются формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;$$

4) если $m+n$ — четное отрицательное число, то применяется замена $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 5.17. Вычислить интеграл $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$.

Р е ш е н и е. В этом случае $m = 2$, $n = 3$. Сделаем замену $\sin x = t$. Тогда $\cos x\, dx = dt$. Учитывая то, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получаем:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x\, dx = \int t^2(1-t^2)\, dt =$$
$$= \int (t^2 - t^4)\, dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C. \quad \square$$

Пример 5.18. Вычислить интеграл $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\, dx$.

Р е ш е н и е. В этом случае $m = 2$, $n = -4$. Сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$. При этом $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$. Значит,

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2\, dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C. \quad \square$$

## 5.3. Определенный интеграл

### 5.3.1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$ (рис. 5.2).

Рассмотрим фигуру $ABCD$, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью $Ox$. Ее называют *криволинейной трапецией*. Поставим задачу об определении и вычислении площади этой криволинейной трапеции. С этой целью разобьем отрезок $[a, b]$ на $n$ произвольных частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$



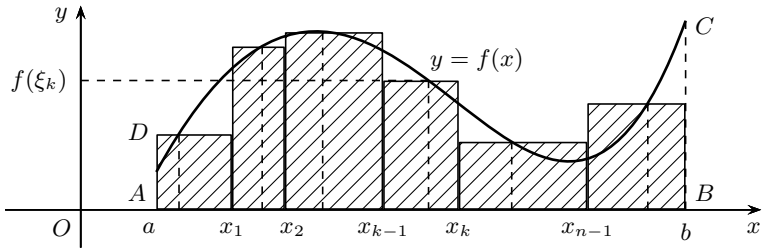


**Рис. 5.2**

Через точки $x_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, проведем прямые, параллельные оси $Oy$. Криволинейная трапеция $ABCD$ разобьется на $n$ частичных криволинейных трапеций. Теперь на каждом из отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$ произвольно выберем по точке $\xi_k$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и вычислим значения $f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Затем каждую частичную криволинейную трапецию заменим прямоугольниками с высотами $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, $\ldots$, $f(\xi_n)$. Тогда можно полагать, что для площади $S$ криволинейной трапеции $ABCD$ справедливо соотношение

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Естественно предположить, что это равенство будет тем точнее, чем меньше

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} (x_k - x_{k-1}) = \lambda.$$

Поэтому площадь криволинейной трапеции $S$ определяют следующим образом:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{5.19}$$

Число $S$, равное пределу (5.19), является определенным интегралом от функции $f$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Таким образом, задача о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к введению понятия определенного интеграла.

Теперь более строго определим понятие определенного интеграла.

Пусть функция $f$ определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем этот отрезок на $n$ частей точками $x_k$, $k=0,1,\ldots,n$:

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_n=b.$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1},\ k=1,2,\ldots,n,\quad \lambda=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k.$$

В каждом из частичных отрезков $[x_{k-1},x_k]$ произвольно выберем по точке $\xi_k$, $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,\ldots,n$. Рассмотрим следующую сумму:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{5.20}$$

Сумма (5.20) называется *интегральной суммой* для функции $f$ на отрезке $[a,b]$.

**Определение 5.6.** Пусть интегральная сумма (5.20) имеет предел $A$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$, ни от выбора точек $\xi_k$. Другими словами, для произвольного положительного числа $\varepsilon$ можно найти такое число $\delta$, что для любого разбиения отрезка $[a,b]$ точками $x_k$, $k=1,2,\ldots,n$, удовлетворяющего условию $\lambda<\delta$, при любом выборе точек $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ выполняется неравенство

$$|\sigma-A|=\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-A\right|<\varepsilon.$$

Тогда этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.21}$$



В этом случае функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$, а числа $a$ и $b$ — соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

*Геометрический смысл определенного интеграла* состоит в том, что определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции (рис. 5.3).

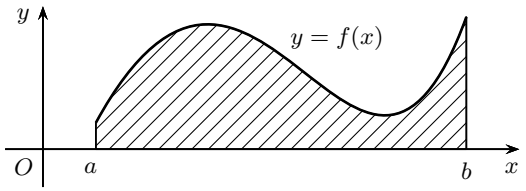


**Рис. 5.3**

Из определения интеграла следует, что значение интеграла (5.21) есть число, зависящее от вида функции $f$, пределов интегрирования $a$ и $b$ и не зависящее от выбора обозначения переменной интегрирования.

Позже мы установим связи между определенным и неопределенным интегралами функции $f$.

Пример 5.19. Найти определенный интеграл $\int_a^b 1\,dx$.

Р е ш е н и е. Построим для функции $f(x)=1$ на отрезке $[a,b]$ интегральную сумму

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k.$$

Учитывая, что $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, имеем:

$$\sigma=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\ldots+(x_{n-1}-x_{n-2})+\\+(x_n-x_{n-1})=b-a.$$

Следовательно, $\int_a^b 1\,dx=\lim\limits_{\lambda\to0}\sigma=b-a$. □

### 5.3.2. Свойства определенного интеграла

При рассмотрении свойств определенных интегралов предполагаем, что интегралы, входящие в доказательства, существуют.

**1.** *По определению полагаем, что*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Первое равенство обусловливается тем, что при составлении интегральных сумм в данном случае каждое из $\Delta x_k$ будет равно нулю и $\sigma = 0$.

Второе равенство объясняется тем, что когда разбиение производится от $b$ к $a$, то разности

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

будут отличаться знаком от таких же разностей в случае разбиения отрезка от $a$ к $b$.

**2.** *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \quad k = \text{const}\,.$$

Доказательство. Для функции $kf(x)$ построим интегральную сумму на отрезке $[a,b]$:

$$\delta = \sum_{k=1}^{n} kf(\xi_x)\Delta x_k.$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{n} kf(\xi_x)\Delta x_k = k\sum_{k=1}^{n} f(\xi_x)\Delta x_k.$$



Тогда, пользуясь определением определенного интеграла, имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} kf(\xi_x)\Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0} k\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = k\int_a^b f(x)\,dx. \quad \square$$

**3.** *Определенный интеграл от суммы функций равен сумме их интегралов, т.е.*

$$\int_a^b (g(x)+f(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{5.22}$$

Доказательство. Действительно, построив интегральную сумму для $f+g$ на отрезке $[a,b]$, имеем:

$$\sigma_{f+g} = \sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k)+g(\xi_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \sigma_f + \sigma_g.$$

После предельного перехода при $\lambda\to 0$ получим равенство (5.22). $\square$

**4.** *Если $c\in(a,b)$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5.23}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a,b]$ такое, чтобы точка $c$ была точкой разбиения, например $c = x_m$. Будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Переходя в этом равенстве к пределу, получаем соотношение (5.23).

Отметим, что равенство (5.23) остается справедливым и в случае $c\notin(a,b)$. При этом необходимо потребовать существования соответствующих интегралов. $\square$

### 5.3.3. Оценки интегралов. Теорема о среднем значении

Теперь рассмотрим некоторые свойства определенных интегралов, описываемые с помощью неравенств.

**1.** *Если* $f(x) \geqslant 0$ *на отрезке* $[a,b]$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Доказательство. Действительно, интегральная сумма

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

такой функции является неотрицательной, так как $f(\xi_k) \geqslant 0$, $\Delta x_k \geqslant 0$, когда $k = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, предел интегральных сумм при $\lambda \to 0$, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

также будет неотрицательным. □

**2.** *Если для функций* $f$ *и* $g$ *на отрезке* $[a,b]$ *справедливо неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) - f(x)$. Очевидно, что $g(x) - f(x) \geqslant 0$, $x \in [a,b]$ и в соответствии с предыдущим свойством

$$\int\limits_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geqslant 0.$$

Остается применить свойство 3 из п. 5.3.2. □



**3.** *Для любой интегрируемой на отрезке* $[a,b]$ *функции* $f$ *имеет место неравенство*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{5.24}$$

Доказательство. Действительно,

$$\forall\, x \in [a,b] \quad -|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|.$$

Следовательно,

$$-\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx,$$

т.е. справедливо неравенство (5.24). □

**4.** *Если* $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in [a,b]$, *то*

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{5.25}$$

Доказательство. Воспользовавшись свойством 2, будем иметь:

$$\int\limits_a^b m\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b M\,dx,$$

или

$$m\int\limits_a^b dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int\limits_a^b dx.$$

Поскольку $\int\limits_a^b dx = b-a$, то получим неравенства (5.25). □

**Теорема 5.4 (о среднем значении определенного интеграла).** *Если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует точка $c \in [a,b]$ (рис. 5.4) такая, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{5.26}$$

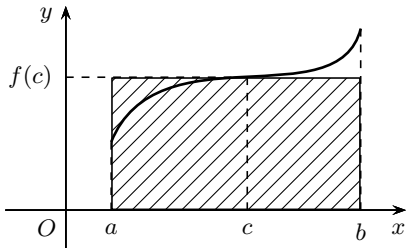


**Рис. 5.4**

Доказательство. Так как функция $f$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то, согласно второй теореме Вейерштрасса, она достигает своего наименьшего и наибольшего значений, т.е.

$$\forall\, x \in [a,b] \quad m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

где

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x); \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

В соответствии с предыдущим свойством

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Отсюда

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$



Теперь, воспользовавшись второй теоремой Больцано — Коши, получим, что существует точка $c \in [a,b]$ такая, что

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

т.е. справедлива формула (5.26). □

Выясним *геометрический смысл теоремы 5.4*. Если предположить, что $f(x) \geqslant 0 \ \ \forall\, x \in [a,b]$, то интеграл слева в формуле (5.26) есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью $Ox$.

В правой части равенства (5.26) стоит площадь прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(c)$, т.е. площадь криволинейной трапеции равна площади некоторого прямоугольника (рис. 5.4).

### 5.3.4. Необходимое условие интегрируемости функции

**Теорема 5.5.** *Если функция $f$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на $[a,b]$.*

Доказательство. Действительно, предположим, что $f$ не ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда при любом разбиении отрезка $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ функция будет неограниченной хотя бы на одном отрезке, например $[x_{j-1}, x_j]$. Следовательно, можно выбрать точку $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ и точки

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n,$$

так, чтобы величина $f(\xi_j)\Delta x_j$, а с ней и вся сума

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

были сколь угодно большими.

Таким образом, не будет существовать конечного предела интегральных сумм, т.е. функция $f$ не является интегрируемой на отрезке $[a,b]$.

Следовательно, интегрируемая функция ограничена на отрезке $[a,b]$. □

Указанное необходимое условие не является достаточным.

Пример 5.20. Показать, что *функция Дирихле*

$$D(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x \text{ иррациональное},\\ 1, & \text{если } x \text{ рациональное},\end{cases} \tag{5.27}$$

ограничена, но не интегрируема на любом отрезке $[a,b]$.

Р е ш е н и е. По определению $|D(x)|\leqslant 1$ при любых $x$, т.е. функция Дирихле ограничена на любом отрезке $[a,b]$. Покажем, что она не является интегрируемой.

Произведем разбиение отрезка $[a,b]$:

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_n=b.$$

Составим интегральную сумму:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k)\Delta x_k.$$

Покажем, что предел интегральных сумм при

$$\lambda=\max_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k-x_{k-1})\to 0$$

не существует. Действительно, если выбрать все $\xi_k$ иррациональными, то $\sigma=0$, если же выбрать все $\xi_k$ рациональными, то

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=b-a\neq 0.$$

Это означает, что не существует числа $A$, удовлетворяющего определению определенного интеграла, т.е. функция Дирихле не интегрируема на любом отрезке $[a,b]$. □



### 5.3.5. Достаточные условия интегрируемости

**Теорема 5.6.** *Если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$.*

Заметим, что условие непрерывности функции является достаточным условием, но не необходимым.

Можно показать, в частности, что справедливы следующие утверждения.

**Теорема 5.7.** *Если функция $f$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет конечное число точек разрыва первого рода, то она интегрируема на отрезке $[a,b]$.*

**Теорема 5.8.** *Если функция $f$ ограничена и монотонна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на отрезке $[a,b]$.*

Например, функция $f(x)=x\cos^2 x+e^x$ является интегрируемой на любом отрезке $[a,b]$, так как она непрерывна на $\mathbb{R}$.

Функция $f(x)=\operatorname{sign}x$ (см. формулу (3.7)) является интегрируемой на отрезке $[-1,1]$, так как только в точке $x=0$ она имеет точку разрыва первого рода.

Функция $f(x)=1/x$ при $x\in(0,1]$ и $f(0)=0$ не является интегрируемой на отрезке, потому что она не ограничена на $[0,1]$.

### 5.3.6. Интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной для непрерывной функции

Важную роль в интегральном исчислении играет связь между определенным и неопределенным интегралами. Перейдем к ее исследованию.

Пусть функция $f$ является интегрируемой на отрезке $[a,b]$. Фиксируем $x\in[a,b]$.

Функция $f$ будет интегрируемой на отрезке $[a,x]$, т.е. существует интеграл

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Теперь каждому $x \in [a, b]$ поставим в соответствие число, равное

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Это означает, что на отрезке $[a, b]$ будет определена функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{5.28}$$

**Определение 5.7.** Функция $\Phi(x)$, задаваемая формулой (5.28), называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

*Геометрический смысл интеграла с переменным верхним пределом* состоит в том, что он численно равен площади криволинейной трапеции, расположенной над отрезком $[a, x]$ (рис. 5.5).

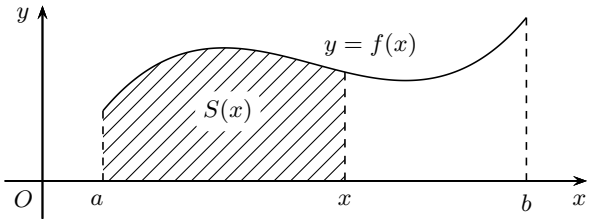


**Рис. 5.5**

**Теорема 5.9.** *Если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция $\Phi$, определяемая формулой* (5.28)*, является дифференцируемой на $[a, b]$, причем*

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Доказательство. Достаточно доказать, что существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(x), \quad x \in [a, b].$$



Из определения функции $\Phi(x)$ и свойства определенного интеграла следует:

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Значит,

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

К полученному интегралу применим теорему о среднем значении. Будем иметь:

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = f(c)\Delta x,$$

где $c$ — некоторая точка, заключенная между $x$ и $x + \Delta x$.

Тогда

$$\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(c),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

Теперь заметим, что если $\Delta x \to 0$, то и $c \to x$. Поэтому в силу непрерывности функции $f$ в точке $x \in [a, b]$ имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x). \qquad \square$$

Иначе говоря, теорема 5.9 утверждает, что производная от интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу.

Теорему 5.9 можно переформулировать следующим образом: *если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

*является ее первообразной на $[a, b]$. Следовательно,*

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C.$$

### 5.3.7. Формула Ньютона — Лейбница

Формула Ньютона — Лейбница считается основной формулой интегрального исчисления. Она позволяет свести вычисление определенного интеграла от непрерывной функции к вычислению разности значений любой ее первообразной на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

**Теорема 5.10.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ — какая-либо ее первообразная, то справедлива формула Ньютона — Лейбница*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{5.29}$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — какая-либо первообразная для непрерывной функции $f$ на $[a,b]$. По теореме 5.9 функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ также является первообразной для $f$ на $[a,b]$. Поскольку любые две первообразные для функции $f$ могут различаться лишь на постоянную (теорема 5.1), то

$$\Phi(x) = F(x) + C, \qquad C = \text{const}, \qquad x \in [a,b]. \tag{5.30}$$

Положив в формуле (5.30) $x = a$, получим: $\Phi(a) = F(a) + C$. Но очевидно, что $\Phi(a) = 0$. Значит, $C = -F(a)$. Поэтому равенство (5.30) можно записать в виде

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Теперь положим здесь $x = b$ и получим формулу Ньютона — Лейбница (5.29). □

Разность $F(b) - F(a)$ принято обозначать $F(x)\big|_a^b$. Поэтому формулу Ньютона — Лейбница можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$



Пример 5.21. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x\,dx.$$

Решение. Одной из первообразных для функции $f(x) = \sin 2x$ является функция $F(x) = -1/2\cos 2x$. Поэтому, применяя формулу Ньютона — Лейбница, имеем:

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{1}{2}.$$ □

### 5.3.8. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

**Теорема 5.11.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем отрезок $[a,b]$ является множеством значений функции $x = \varphi(t)$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{5.31}$$

Доказательство. Пусть $F$ — первообразная для функции $f$:

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a,b].$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{5.32}$$

Положим $G(t) = F(\varphi(t))$. По правилу дифференцирования сложной функции получим, что

$$G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Следовательно, функция $G(t)$ есть первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[a,b]$, и по формуле Ньютона — Лейбница находим:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha) =$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \quad (5.33)$$

Правые части равенств (5.32) и (5.33) совпадают. Сравнив их левые части, получим формулу (5.31). □

Формула (5.31) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле.*

Пример 5.22. Найти интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой замены переменной. Положим $1-x^2=t$, $-2x\,dx=dt$. Очевидно, что $1-0^2=1$, $1-1^2=0$. По формуле (5.31)

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}\Big|_0^1 = \sqrt{1}-\sqrt{0}=1.$$

В этом случае можно поступить и по-другому. Положим $x=\sin t$, $dx=\cos t\,dt$. Очевидно, что $\sin 0=0$, $\sin(\pi/2)=1$. Отрезок $[0,1]$ является множеством значений функции $x=\sin t$, $t\in[0,\pi/2]$. По формуле (5.31)

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} \sin t\,dt = \cos t\Big|_0^{\pi/2} = 1. \quad \square$$

Подчеркнем два важных момента. Во-первых, при использовании формулы замены переменной (5.31) в интеграле справа следует найти и поставить новые пределы интегрирования. Во-вторых, здесь в отличие от неопределенного интеграла нет необходимости возвращаться к старой переменной.



**Теорема 5.12.** *Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула*

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \quad (5.34)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что функция $u(x)v(x)$ является первообразной для функции $v(x)u'(x)+u(x)v'(x)$, так как

$$(u(x)v(x))' = v(x)u'(x)+u(x)v'(x).$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^b (v(x)u'(x)+u(x)v'(x))\,dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b,$$

или

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int\limits_a^b (v(x)u'(x).$$

В силу того что $u'(x)\,dx=du$, $v'(x)\,dx=dv$, эту формулу можно записать в виде (5.34). □

Формулу (5.34) называют *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.*

Пример 5.23. Найти интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 xe^x\,dx$.

Р е ш е н и е. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^1 xe^x\,dx = \int\limits_0^1 x\,de^x = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x\,dx =$$

$$= e - \int\limits_0^1 e^x\,dx = e - e^x\Big|_0^1 = e-(e-1)=1. \quad \square$$

# 5.4. Приложения определенного интеграла

## 5.4.1. Площадь криволинейной трапеции

В § 5.3 уже отмечалось, что определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

от неотрицательной функции $f$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$.

Пример 5.24. Вычислить площадь фигуры, заключенной между осью $Ox$ и синусоидой $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ (рис. 5.6).

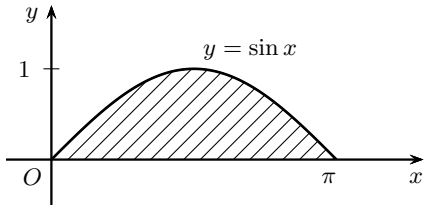


**Рис. 5.6**

Р е ш е н и е. Находим:

$$S = \int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2. \qquad \square$$

Если фигура не является криволинейной трапецией, то ее площадь стараются представить в виде суммы или разности площадей фигур, являющихся криволинейными трапециями. В частности, справедлива следующая теорема.



**Теорема 5.13.** *Если фигура ограничена снизу и сверху графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ (не обязательно неотрицательных (рис. 5.7)), то ее площадь можно найти по формуле*

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx.$$

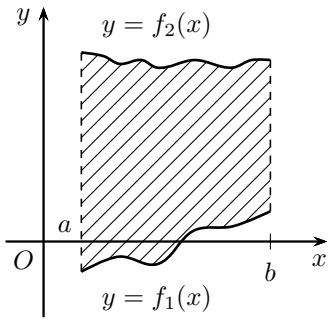


**Рис. 5.7**

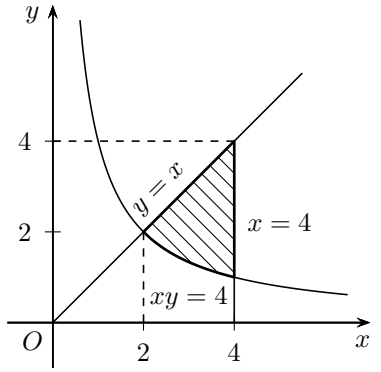


**Рис. 5.8**

Пример 5.25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $xy = 4$ и прямыми $y = x$ и $x = 4$.

Р е ш е н и е. Построим фигуру на плоскости (рис. 5.8).
Очевидно, что $f_1(x) = 4/x$, $f_2(x) = x$. Тогда

$$S = \int_2^4 \left(x - \frac{4}{x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 4\ln x\right)\Big|_2^4 =$$
$$= 8 - 4\ln 4 - (2 - 4\ln 2) = 2(3 - 2\ln 2). \qquad \square$$

## 5.4.2. Длина дуги кривой

Вычисление длин кривых также приводит к интегралам. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема

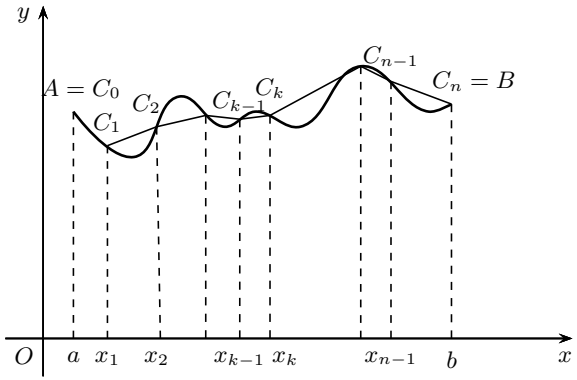


**Рис. 5.9**

на интервале $(a,b)$. Ее график представляет собой некоторую кривую $AB$, $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ (рис. 5.9).
Разобьем кривую $AB$ точками $C_0 = A, C_1, C_2, \ldots, C_n = B$ на $n$ произвольных частей. Соединим две соседние точки $C_{k-1}$ и $C_k$, $k = 1,2,\ldots,n$, хордами. Получим $n$-звенную ломаную, вписанную в кривую $AB$. Пусть $l_k$ — длина хорды $C_{k-1}C_k$, $k = 1,2,\ldots,n$, $\omega = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} l_k$. Длина ломаной будет выражаться формулой

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} l_k.$$

Естественно определить длину $L$ кривой $AB$ как предельное значение длин ломаных $L_n$, когда $\omega \to 0$, т.е.

$$L = \lim_{\omega\to 0} L_n = \lim_{\omega\to 0} \sum_{k=1}^{n} l_k\,. \tag{5.35}$$

Пусть $x_k$ — абсциссы точек $C_k$, $k = 1,2,\ldots,n$, и

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Тогда точки $C_k$ имеют координаты $x_k$ и $f(x_k)$. По формуле для расстояния между двумя точками находим:

$$l_n = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}\,. \tag{5.36}$$



По формуле конечных приращений имеем:

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \xi_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

Подставив полученное выражение в формулу (5.36), найдем:

$$l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k.$$

Следовательно, $L_n$ есть интегральная сумма для функции

$$\sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}$$

на отрезке $[a,b]$. Тогда на основании равенств (5.35)

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{5.37}$$

Пример 5.26. Найти длину кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ между $x = 0$ и $x = 3$.

Р е ш е н и е. Построим график указанной функции (рис. 5.10).

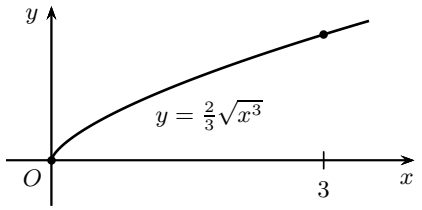


**Рис. 5.10**

По формуле (5.37) находим:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1 + (x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx =$$

$$= \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}\,d(x+1) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}. \quad \square$$

### 5.4.3. Объем тела вращения

Пусть функция $f$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Построим соответствующую криволинейную трапецию $ABCD$ (рис. 5.11).

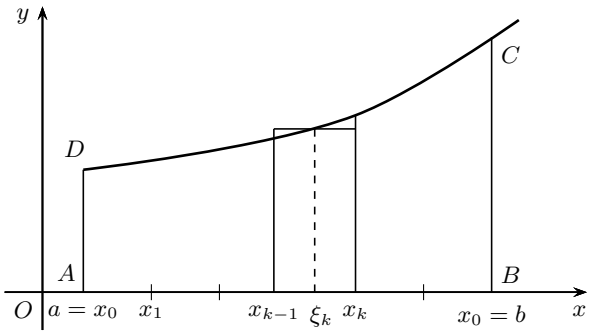


**Рис. 5.11**

Если криволинейную трапецию $ABCD$ вращать вокруг оси $Ox$, то образуется тело, называемое *телом вращения* (рис. 5.12). Поставим задачу определения и вычисления объема $V$ этого тела. С этой целью разобьем отрезок $[a, b]$ точками:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k.$$

Произвольно выберем по точке $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и вычислим $f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Теперь построим плоскости, проходящие через каждую точку $x_k$ и перпендикулярные оси $Ox$. Они разобьют тело на $n$ частей (элементарных тел). Каждое элементарное тело заменим цилиндром высотой $\Delta x_k$ и радиусом $f(\xi_k)$. Объем такого цилиндра равен $\pi(f(\xi_k))^2 \Delta x_k$, и естественно полагать, что объем тела

$$V = \sum_{k=1}^{n} \pi(f(\xi_k))^2 \Delta x_k.$$

В правой части последнего равенства стоит интегральная сумма



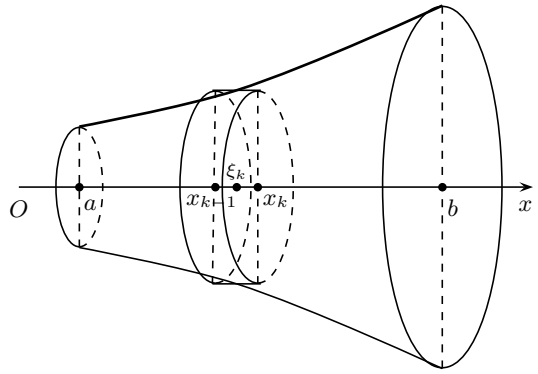


**Рис. 5.12**

для функции $\pi f^2(x)$ на отрезке $[a, b]$. Поэтому, переходя к пределу при $\lambda \to 0$, найдем:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{5.38}$$

Таким образом, формула (5.38) есть формула для вычисления объемов тел вращения вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

Если же криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y) \geqslant 0$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси $Oy$,

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\, dy.$$

Пример 5.27. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $Ox$ области под параболой $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 2$.

Р е ш е н и е. По формуле (5.38)

$$V = \pi \int_0^2 x^4\, dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi. \qquad \square$$

### 5.4.4. Использование понятия определенного интеграла в экономике

Рассмотрим сначала экономический смысл определенного интеграла.

Пусть функция $f(t)$ описывает изменение производительности некоторого предприятия с течением времени. Найдем объем продукции $q$, произведенной за промежуток времени $[0, T]$.

Если предположить, что производительность не изменяется с течением времени (т.е. $f(t) = \text{const}$), то объем продукции $\Delta q$, произведенной за некоторый промежуток времени $[t, t + \Delta t]$, задается формулой $\Delta q = f(t)\Delta t$. Если $f(t)$ не является постоянной функцией, то справедливо приближенное равенство $\Delta q \approx f(\xi)\Delta t$, где $\xi \in [t, t + \Delta t]$, которое оказывается тем точнее, чем меньше $\Delta t$. Поэтому для решения задачи о нахождении объема продукции поступим так же, как при нахождении площади криволинейной трапеции. Разобъем отрезок $[0, T]$ на промежутки времени точками:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T.$$

Для объема продукции $\Delta q_i$, произведенной за промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеем:

$$\Delta q_i \approx f(\xi_i)\Delta t_i, \quad \xi_i \in [t_{i-1}; t_i], \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

Тогда

$$q \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta q_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i.$$

При

$$\max_i \Delta t_i \to 0$$

каждое из использованных приближенных равенств становится все более точным, поэтому

$$q = \lim_{\max_i \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i.$$



Учитывая определение определенного интеграла, окончательно получаем:

$$q = \int_0^T f(t)\,dt,$$

т.е. если $f(t)$ — производительность труда в момент времени $t$, то

$$\int_0^T f(t)\,dt$$

есть объем продукции, выпускаемой за промежуток $[0, T]$.

Сравнивая данную задачу с задачей нахождения площади криволинейной трапеции, получаем, что объем продукции, произведенной за промежуток времени $[0, T]$, численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции $f(t)$, описывающей изменения производительности труда с течением времени, отрезком $[0, T]$ и прямыми $t = 0$, $t = T$.

Пример 5.28. Определить объем продукции, произведенной рабочим за второй час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией

$$f(t) = \frac{2}{3t + 4} + 3.$$

Р е ш е н и е. Находим:

$$q = \int_1^2 \left(\frac{2}{3t+4} + 3\right) dt = \left(\frac{2}{3}\ln|3t+4| + 3t\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\ln 10 - \frac{2}{3}\ln 7 + 6 - 3 = \frac{2}{3}\ln\frac{10}{7} + 3. \quad \square$$

В экономических исследованиях часто используется *производственная функция Кобба — Дугласа*

$$F(K, L) = a_0 L^{\alpha_1} K^{\alpha_2}, \tag{5.39}$$

где $K$ — затраты капитала (объем производственных фондов); $L$ — затраты труда. Подробнее об этой функции будет идти речь в п. 6.1.9.

Если в формуле (5.39) затраты труда линейно зависят от времени, а затраты капитала неизменны, то функцию Кобба — Дугласа можно преобразовать к виду

$$g(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}.$$

Тогда объем выпускаемой продукции за $T$ лет составит

$$q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}\,dt. \tag{5.40}$$

Пример 5.29. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба — Дугласа имеет вид

$$g(t) = (1 + t)e^{3t}.$$

Р е ш е н и е. По формуле (5.40) объем $Q$ произведенной продукции

$$q = \int_0^4 (1+t)e^{3t}\,dt = \frac{e^{3t}}{3}(t+1)\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3}\,e^{3t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}(5e^{12} - 1) - \frac{1}{9}\,e^{3t}\Big|_0^4 = \frac{1}{9}(14e^{12} - 2) \approx 2{,}53 \cdot 10^5.$$

Для вычисления интеграла здесь использован метод интегрирования по частям; при этом

$$u = t + 1, \quad dv = e^{3t}\,dt, \quad du = dt, \quad v = \frac{1}{3}\,e^{3t}. \qquad \square$$

В курсе макроэкономики часто рассматривают так называемые предельные величины (см. также п. 4.1.9). Например, если задана функция издержек $C = C(q)$, то предельные издержки будут задаваться производной этой функции $MC = C'(q)$. Экономический смысл функции $MC$ — это издержки на производство дополнительной единицы продукции. Часто приходится находить функцию издержек по известной функции предельных издержек.



Пример 5.30. Дана функция предельных издержек

$$MC = 3q^2 - 48q + 202, \quad 1 \leqslant q \leqslant 20.$$

Найти функцию издержек $C = C(q)$ и вычислить издержки в случае производства 10 единиц товара, если известно, что издержки для производства первой единицы товара составили 50 ден. ед.

Р е ш е н и е. Функцию издержек находим интегрированием:

$$C(q) = \int_1^q MC\,dq + C_0 = \int_1^q (3q^2 - 48q + 202)\,dq + C_0 =$$

$$= (q^3 - 24q^2 + 202q)\Big|_1^q + C_0 = q^3 - 24q^2 + 202q - 179 + C_0,$$

где константа $C_0$ определяется из условия $C(1) = 50$, поэтому $C_0 = 50$. Значит,

$$C(q) = q^3 - 24q^2 + 202q + 50.$$

Поэтому

$$C(10) = 10^3 - 24 \cdot 10^2 + 202 \cdot 10 + 50 = 670 \text{ (ден. ед.)} \qquad \square$$

Часто для решения экономических задач применяют теорему о среднем значении и формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a), \quad \xi \in [a, b].$$

Число

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

называют средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

На практике нередко вычисляют средние значения (например, средняя производительность труда, средняя мощность электродвигателей и т.д.).

Пусть известна функция $t = t(x)$, где $x$ — порядковый номер изделия в партии, описывающая изменение затрат времени $t$ на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства. Тогда среднее время $t_{\text{ср}}$, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения изделий от $x_1$ до $x_2$, вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)\, dx.$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий $t = t(x)$, то она часто имеет вид

$$t = Ax^{-B}, \tag{5.41}$$

где $A$ — затраты времени на первое изделие; $B$ — показатель производственного процесса.

Пример 5.31. Найти среднее значение издержек

$$C(q) = 3q^2 + 4q + 2,$$

выраженных в денежных единицах, если объем продукции $q$ меняется от 2 до 4 ед. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

Р е ш е н и е. Применяя теорему о среднем значении, имеем:

$$C_{\text{ср}}(\xi) = \frac{1}{4-2} \int_2^4 (3q^2 + 4q + 1)\, dq = \frac{1}{2}\left(3\frac{q^3}{3} + 4\frac{q^2}{2} + 2q\right)\Big|_2^4 =$$

$$= \frac{1}{2}(104 - 20) = 42 \text{ (ден. ед.)},$$

т.е. среднее значение издержек равно 42 ден. ед.

Определим, при каком объеме продукции издержки принимают это среднее значение, т.е. решим уравнение

$$3q^2 + 4q + 2 = 42.$$

Учитывая, что объем продукции не может быть отрицательным, из последнего уравнения имеем $q = 3$ ед. продукции. □



Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной за время $t$ (лет) при годовом проценте (процентной ставке) $p$, называется *дисконтированием*. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений.

Пусть $K_t$ — конечная сумма, полученная за $t$ лет, и $K$ — дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также современной суммой. Если проценты простые, то $K_t = K(1+it)$, где $i = \frac{p}{100}$ — удельная процентная ставка. Тогда $K = \frac{K_t}{1+it}$. В случае сложных процентов $K_t = K(1+it)^t$, поэтому $K = \frac{K_t}{(1+it)^t}$.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ и при удельной норме процента, равной $i$, процент начисляется непрерывно. В этом случае дисконтированный доход $K$ за время $T$ вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}\, dt. \tag{5.42}$$

Пример 5.32. Определить дисконтированный доход за 3 года при ставке 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 тыс. денежных единиц и намечается ежегодное увеличение капиталовложения на 1 тыс. ден. ед.

Р е ш е н и е. Очевидно, что капиталовложения задаются функцией $f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$. Тогда по формуле (5.42) дисконтируемая сумма капиталовложений

$$K = \int_0^3 (10 + t)e^{-0{,}08t}\, dt.$$

Применив формулу интегрирования по частям, получим $K =$ $=$ 30,5 тыс. ден. ед. Это означает, что для получения одинаковой наращиваемой суммы через 3 года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 тыс. ден. ед. равносильны одновременным первоначальным вложениям 30,5 тыс. ден. ед. при той же начисляемой непрерывно процентной ставке. □

# 5.5. Несобственные интегралы

## 5.5.1. Обобщение понятия определенного интеграла

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ рассматривался при двух условиях:

1) промежуток $[a, b]$ конечен,
2) функция $f$ ограничена на $[a, b]$.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то данное в § 5.3 определение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не имеет смысла. Если, например, промежуток интегрирования бесконечный, то его нельзя разбить на $n$ частей конечной длины. Если же функция $f$ не ограничена на $[a, b]$, то не существует конечного предела интегральных сумм. Обобщим понятие интеграла и на эти случаи.

## 5.5.2. Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования

Предположим, что функция задана на $[a, +\infty)$ и является интегрируемой на любом конечном отрезке $[a, A]$, $a < A$, т.е. существует интеграл

$$\int\limits_a^A f(x)\,dx.$$

**Определение 5.8.** *Несобственным интегралом первого рода* или *несобственным интегралом с бесконечным пределом интегрирования*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$



называется предел

$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx, \tag{5.43}$$

т.е.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx.$$

**Определение 5.9.** Если предел (5.43) существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*; если же этот предел не существует или бесконечен, то интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

называется *расходящимся*.

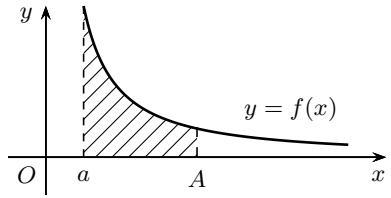


**Рис. 5.13**

Рассмотрим геометрическую интерпретацию несобственного интеграла первого рода. Пусть, например, функция $f$ является неотрицательной и невозрастающей на $[a, +\infty)$ (рис. 5.13).

Интеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ численно равен площади заштрихованной криволинейной трапеции. При возрастании $A$ эта площадь будет увеличиваться. При этом она может неограниченно возрастать либо оставаться ограниченной и стремиться к какому-то пределу. Этот предел и есть

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Подчеркнем, что площадь фигуры, заключенной между графиком функции $y = f(x)$ и осью $Ox$ вправо от точки $x = a$, может быть конечной, несмотря на то, что эта фигура является неограниченной.

*Геометрический смысл несобственного интеграла первого рода* состоит в том, что он численно равен площади полубесконечной фигуры, ограниченной графиком неотрицательной функции, прямой $x = 0$ и отрезком $[a, +\infty]$ оси $Ox$.

Пример 5.33. Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

(или установить его расходимость).

Р е ш е н и е. По определению (см. выражение (5.43)) имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A} e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^A\right) = \\ = \lim_{A\to+\infty}(1 - e^{-A}) = 1. \quad \square$$

Пример 5.34. Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

(или установить его расходимость).

Р е ш е н и е. Находим:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty}\left(\ln x\Big|_1^A\right) = \lim_{A\to+\infty}\ln A = +\infty.$$

Следовательно, этот интеграл расходится. $\square$



*Замечание* 5.4. Несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha \neq 1,$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^{A} x^{-\alpha}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^A\right) = \\ = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{A\to+\infty}(A^{1-\alpha} - 1), \quad \alpha \neq 1.$$

Предположим, что $1 - \alpha < 0$, т.е. $\alpha > 1$. Тогда имеем, что

$$\lim_{A\to+\infty}(A^{1-\alpha} - 1) = -1, \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{-1}{1-\alpha},$$

т.е. несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и его значение равно $(\alpha - 1)^{-1}$.

Пусть теперь $1 - \alpha > 0$, т.е. $\alpha < 1$. Тогда

$$\lim_{A\to+\infty}(A^{1-\alpha} - 1) = +\infty$$

и интеграл расходится. Учитывая пример 5.34, заключаем, что интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится при $\alpha \leqslant 1$. $\square$

Замечание 5.4 свидетельствует о том, что функция $f(x) = 1/x^\alpha$ в случае $\alpha > 1$ достаточно быстро стремится к нулю при $x \to +\infty$, и это обеспечивает существование несобственного интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Если же $\alpha \leqslant 1$, то $f(x) = 1/x^\alpha$ стремится к нулю медленно при $x \to +\infty$ или совсем не стремится к нулю, и поэтому рассматриваемый интеграл расходится.

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла по промежутку $(-\infty, b)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty} \int\limits_{B}^{b} f(x)\,dx.$$

Предположим, что функция $f$ определена на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$. Теперь рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{5.44}$$

Фиксируем произвольное число $c \in \mathbb{R}$. Разобьем интеграл (5.44) на два:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{5.45}$$

где $c$ — произвольное число.

Интеграл (5.44) называют сходящимся, если оба интеграла в правой части равенства (5.45) сходятся, и расходящимся — в противном случае.

### 5.5.3. Интегралы от неограниченных функций

Предположим, что функция $f$ не ограничена на отрезке $[a, b]$. Построим обобщение интеграла на этот случай.

Пусть функция $f$ определена на промежутке $[a, b)$. В любой окрестности точки $x = b$ функция $f$ может быть неограниченной. Предположим, что функция $f$ интегрируема на любом отрезке $[a, b_1] \subset [a, b)$, т.е. существует интеграл

$$\int\limits_{a}^{b_1} f(x)\,dx, \quad b_1 \in [a, b).$$



**Определение 5.10.** *Несобственным интегралом второго рода* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел

$$\lim_{b_1\to b-0} \int\limits_{a}^{b_1} f(x)\,dx, \tag{5.46}$$

т.е.

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{b_1\to b-0} \int\limits_{a}^{b_1} f(x)\,dx.$$

Если предел (5.46) существует и конечен, то рассматриваемый интеграл называется сходящимся, в противном случае — расходящимся.

*Геометрический смысл несобственного интеграла второго рода* состоит в том, что он численно равен площади полубесконечной фигуры, ограниченной графиком неотрицательной функции, прямыми $x = a$, $x = b$ и частью оси $Ox$ (рис. 5.14).

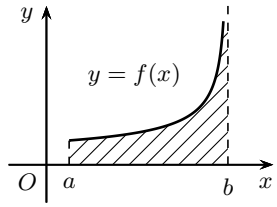


**Рис. 5.14**

Если функция $f$ определена на промежутке $(a, b]$ и не ограничена в окрестности точки $x = a$, то полагают, что

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a_1\to a+0} \int\limits_{a_1}^{b} f(x)\,dx.$$

Наконец, пусть функция $f$ определена на интервале $(a, b)$ и не ограничена и в окрестности точки $a$, и в окрестности точки $b$. Произвольным образом выберем число $c \in (a, b)$. Получим:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx. \tag{5.47}$$

Несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

называют сходящимся, если оба интеграла в правой части равенства (5.47) сходятся, и расходящимся — в противном случае.

Пример 5.35. Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(или установить его расходимость).

Р е ш е н и е. Данный интеграл является несобственным интегралом второго рода. Функция $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ не ограничена в любой окрестности точки $x = 1$. Поэтому по формуле (5.46) имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b_1\to 1-0}\left(\arcsin x\Big|_0^{b_1}\right) = \lim_{b_1\to 1-0}\arcsin b_1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Пример 5.36. Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$$

(или установить его расходимость).

Р е ш е н и е. По определению несобственного интеграла второго рода имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a_1\to+0}\int\limits_{a_1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a_1\to+0}\left(\ln|x|\Big|_{a_1}^1\right) = \lim_{a_1\to+0}(\ln 1 - \ln a_1) = \infty.$$

Значит, указанный интеграл расходится. $\square$



*Замечание* 5.5. Несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha\in\mathbb{R},$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В этом интеграле функция $f(x) = 1/x^\alpha$ может быть неограниченной в окрестности точки $x = 0$.

По определению имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a_1\to+0}\int\limits_{a_1}^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Случай $\alpha = 1$ рассмотрен в примере 5.36. Этот интеграл расходится.

Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a_1\to+0}\int\limits_{a_1}^1 x^{-\alpha}\,dx = \lim_{a_1\to+0}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{a_1}^1\right) = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{a_1\to+0}(1-{a_1}^{1-\alpha}).$$

Рассмотрим два случая: $\alpha < 1$ и $\alpha > 1$. Если $\alpha < 1$, то

$$\lim_{a_1\to+0}(1-{a_1}^{1-\alpha}) = 1, \quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Если же $\alpha > 1$, то

$$\lim_{a_1\to+0}(1-{a_1}^{1-\alpha}) = \lim_{a_1\to+0}\left(1-\frac{1}{{a_1}^{\alpha-1}}\right) = -\infty.$$

Следовательно, интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится, если $\alpha < 1$, и расходится, если $\alpha \geqslant 1$. $\square$

Мы рассмотрели понятие несобственных интегралов. В расширенном курсе высшей математики подробно рассматриваются условия их сходимости и устанавливаются соответствующие признаки.

# Глава 6

# Дифференцирование функций двух переменных

## 6.1. Функция двух переменных. Дифференциал

### 6.1.1. Определения

**Определение 6.1.** Обозначим через $D$ некоторое множество точек $M(x, y)$ плоскости $\mathbb{R}^2$. Правило $f$, ставящее в соответствие каждой упорядоченной паре действительных чисел $(x, y) \in D$ единственное число $z$ из множества действительных чисел $\mathbb{R}$, называется *функцией двух переменных* и обозначается $z = f(x, y)$, $z = f(M)$ либо $f : D \to \mathbb{R}$. Множество $D$ при этом называется *областью определения функции*. Множество

$$\{\, f(x, y) \mid (x, y) \in D \,\}$$

называется *множеством значений функции* $f$.

Множество значений является подмножеством множества действительных чисел $\mathbb{R}$, а область определения — подмножеством точек плоскости $Oxy$.

Функцию двух переменных можно изобразить графически. Для этого в каждой точке $(x, y) \in D$ вычисляется значение функции $z = f(x, y)$. Тогда тройка чисел $(x, y, z) = (x, y, f(x, y))$ определяет в системе декартовых координат в пространстве некоторую точку $P$ (рис. 6.1).



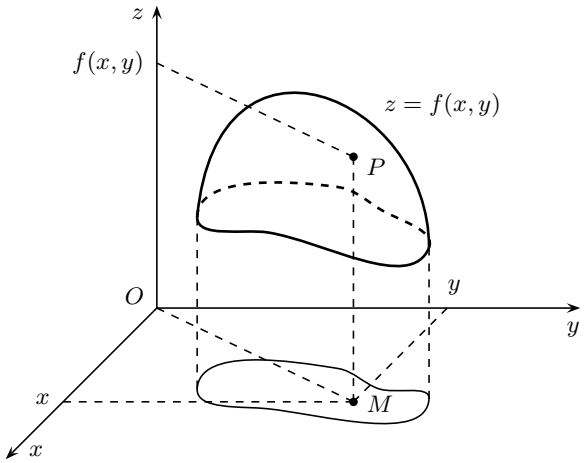


**Рис. 6.1**

**Определение 6.2.** Совокупность точек $P(x, y, f(x, y))$ (рис. 6.1) представляет собой поверхность в трехмерном пространстве, которая называется *графиком функции* $z = f(x, y)$.

Пример 6.1. Графиком линейной функции $z = Ax + By + C$ является плоскость.

Пример 6.2. Для функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ область определения $D(f)$ есть единичный круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, а множество значений — отрезок $[0, 1]$. График этой функции представляет собой верхнюю полусферу единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 6.2).

Наглядное представление о функции двух или трех переменных может дать картина ее линий уровня.

**Определение 6.3.** *Линией уровня функции* $z = f(x, y)$ называется множество точек $M(x, y)$ плоскости $Oxy$, удовлетворяющих равенству $f(x, y) = c$, где $c$ — константа.

Иными словами, линия уровня — это кривая, во всех точках которой функция $f$ принимает одно и то же постоянное значение $c$. Геометрически линии уровня получаются как проекции на плоскость $Oxy$ линий пересечения графика функции $f$ и горизонтальных плоскостей $z = c$.

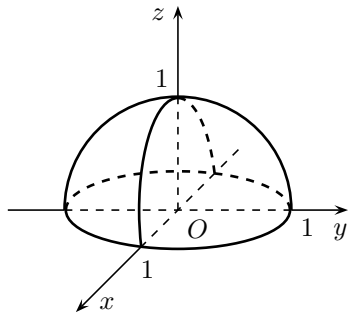


**Рис. 6.2**

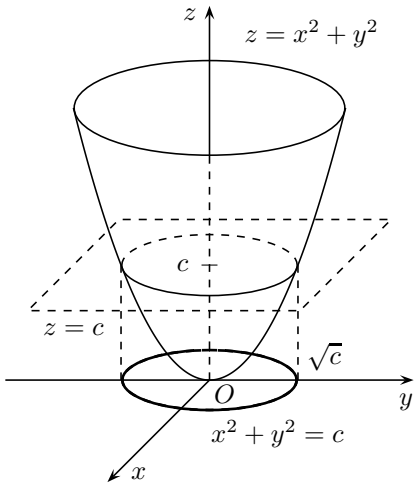


**Рис. 6.3**

Пример 6.3. Построить семейство линий уровня параболоида вращения $z = x^2 + y^2$.

Р е ш е н и е. Придавая постоянной $c$ значения $0, 1, 2, \ldots$ (очевидно, что константа $c$ не может быть отрицательной), получим уравнения некоторых линий уровня. Например:

$x^2 + y^2 = 0$ представляет собой точку $O(0, 0)$;

$x^2 + y^2 = 1$ является окружностью радиуса $R = 1$ с центром $O(0, 0)$;

$x^2 + y^2 = 2$ есть окружность радиуса $R = \sqrt{2}$ с центром $O(0, 0)$.

Таким образом, линиями уровня функции $z = x^2 + y^2$ являются концентрические окружности с центром в начале координат и радиусом $c \geqslant 0$, которые получаются в результате пересечения поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$ с плоскостями $z = c$ (рис. 6.3). □

Линии уровня используются в картографии. Так, например, на топографических картах рисуют линии равной высоты над уровнем моря, на метеорологических картах изображают линии одинакового давления — изобары.



По линиям уровня, построенным для некоторой рассматриваемой функции с одинаковыми промежутками между значениями $c_1$, $c_2$, $c_3, \ldots, c_n, \ldots$, можно получить представление о графике функции (т.е. о форме поверхности). В тех местах, где линии располагаются «гуще», функция при переходе от одного значения $c$ к другому меняется быстрее, чем там, где линии распределены реже.

### 6.1.2. Предел функции двух переменных

Напомним, что если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат, то расстояние между двумя точками определяется формулой (1.21).

**Определение 6.4.** Говорят, что последовательность точек плоскости $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится к точке* $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всякого $n > N_\varepsilon$

$$M_n M_0 = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon.$$

**Определение 6.5.** Число $A$ называется *пределом функции* $f$ *в точке* $M_0$, если для любой последовательности точек плоскости $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящейся к точке $M_0$ и такой, что $M_n \neq M_0$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к числу $A$.

Тот факт, что число $A$ является пределом функции двух переменных $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, можно записать одним из следующих способов:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A, \qquad \lim_{M\to M_0} f(M) = A.$$

*Замечание* 6.1. Если для некоторых двух последовательностей точек $\{M'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{M''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящихся к $M_0$, пределы соответствующих последовательностей $\{f(M'_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{f(M''_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеют разные значения или хоть один из них не существует, то в точке $M_0$ функция $f$ предела не имеет.

Пример 6.4. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$?

Р е ш е н и е. Рассмотрим последовательность точек $M'_n(1/n, 0)$, стремящуюся к началу координат по положительной части оси $Ox$. Для этой последовательности

$$\lim_{n\to\infty} f(M'_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\frac{1}{n^2}+0} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Возьмем теперь последовательность $M''_n(1/n, 1/n)$, стремящуюся к началу координат по направлению биссектрисы первого координатного угла. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(M''_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, двум разным последовательностям точек, стремящимся к началу координат по разным путям, соответствуют две последовательности значений функции, имеющие разные пределы. Значит, данный предел не существует. □

Как и для функций одной переменной, можно доказать, что данное нами определение предела функции на языке последовательностей эквивалентно приводимому ниже определению на языке $\varepsilon - \delta$.

**Определение 6.6.** Число $A$ называется *пределом функции* $f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $\delta$, зависящее от $\varepsilon$, что для всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta,$$

выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Иными словами, число $A$ называется *пределом функции* $f$ *в точке* $M_0$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, M,\ 0 < MM_0 < \delta, \quad |f(M) - A| < \varepsilon.$$



**Определение 6.7.** Внутренность круга с центром в точке $M_0$ и радиусом $\varepsilon$, т.е. множество

$$U(M_0, \varepsilon) = \left\{(x, y) \;\middle|\; (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2\right\},$$

называется *$\varepsilon$-окрестностью* или просто *окрестностью точки* $M_0$ (рис. 6.4).

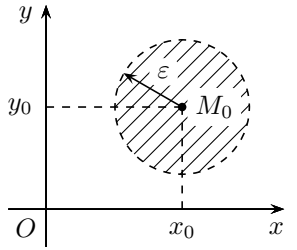


**Рис. 6.4**

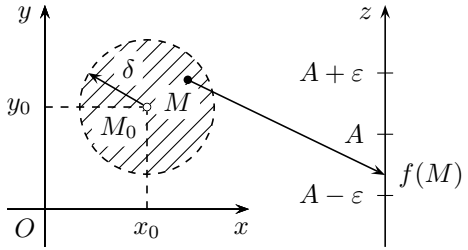


**Рис. 6.5**

«Переведем» определение предела функции двух переменных на «язык окрестностей».

**Определение 6.8.** Число $A$ называется *пределом функции* $f(M)$ *в точке* $M_0$, если для любой $\varepsilon$-окрестности точки $A$ найдется такая $\delta$-окрестность точки $M_0$, что для всех точек $M \neq M_0$ из этой $\delta$-окрестности соответствующие значения функции $f(M)$ лежат в $\varepsilon$-окрестности точки $A$.

Определение 6.8 выражает *геометрический смысл предела функции двух переменных* (рис. 6.5).

Все положения теории пределов функции одной переменной можно перенести на функцию двух переменных.

### Свойства предела функции двух переменных

**1.** *Если у функции $f(M)$ есть предел при $M \to M_0$, то этот предел единственный.*

**2.** *Если функция $f(M)$ имеет в точке $M_0$ предел, то существует окрестность этой точки, в которой функция $f(M)$ ограничена.*

**3.** *Если* $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$, $\lim\limits_{M\to M_0} g(M)=B$, *то:*

1) $\lim\limits_{M\to M_0}\Big(f(M)\pm g(M)\Big)=A\pm B$,

2) $\lim\limits_{M\to M_0}\Big(f(M)g(M)\Big)=AB$,

3) $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f(M)}{g(M)}=\dfrac{A}{B}$ *при условии, что* $B\neq 0$.

**4 (о пределе промежуточной функции).** *Пусть функции* $f(M)$, $g(M)$ *и* $\varphi(M)$ *определены в некоторой окрестности точки* $M_0$, *кроме, быть может, самой точки* $M_0$, *и удовлетворяют в этой окрестности неравенствам* $f(M)\leqslant\varphi(M)\leqslant g(M)$. *Если*

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=\lim_{M\to M_0} g(M)=A,$$

*то предел функции* $\varphi(M)$ *в точке* $M_0$ *существует и тоже равен* $A$.

Пример 6.5. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$?

Р е ш е н и е. Так как $|xy|\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$, то

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{|x|\dfrac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2}=\frac{|x|}{2}$$

и

$$-\frac{|x|}{2}\leqslant\frac{x^2y}{x^2+y^2}\leqslant\frac{|x|}{2}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|x|}{2}=0,$$

поэтому по свойству 4 предела промежуточной функции искомый предел существует и равен нулю. □



### 6.1.3. Непрерывность функции двух переменных

**Определение 6.9.** Функция $z=f(x,y)$, определенная в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, называется *непрерывной в точке* $M_0$, если в этой точке существует предел функции $f(x,y)$, равный значению функции в этой точке:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Другими словами, достаточно малые изменения независимых переменных $x$ и $y$ обеспечивают сколь угодно малые изменения значений функции. Геометрически это означает, что достаточно малые сдвиги точек на плоскости $Oxy$ ведут к сколь угодно малым изменениям аппликаты точек поверхности, представляющей собой график функции $z=f(x,y)$.

По аналогии с функциями одной переменной можно доказать, что арифметические действия над непрерывными функциями и построение сложных функций из непрерывных функций приводят к непрерывным же функциям. При этом для непрерывности частного, как всегда, требуется, чтобы делитель не обращался в нуль.

**Определение 6.10.** Функция, непрерывная в каждой точке множества, называется *непрерывной на этом множестве.*

Пример 6.6. Функция

$$z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{в точке } O(0,0)\end{cases}$$

непрерывна в начале координат (см. пример 6.5). В других точках она непрерывна как элементарная функция. Таким образом, эта функция непрерывна во всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

**Определение 6.11.** Точка, в которой функция не определена или определена, но не является непрерывной, называется *точкой разрыва функции.*

Пример 6.7. Для функции

$$z = \frac{1}{9x^2 - 4y^2}$$

точки разрыва образуют множество точек плоскости $Oxy$, определяемое равенством $9x^2 - 4y^2 = 0$, т.е. две прямые $y = \pm 3x/2$.

Приведенное выше определение описывает непрерывность функции $f$ по совокупности переменных. Зафиксировав переменную $y = y_0$, получим функцию $\varphi(x) = f(x, y_0)$ одной переменной $x$.

**Определение 6.12.** Если функция $\varphi(x) = f(x, y_0)$ непрерывна в точке $x_0$, то говорят, что функция $f(x, y)$ *непрерывна в точке* $(x_0, y_0)$ *по переменной* $x$. Аналогично вводится понятие *непрерывности функции* $f$ *в точке* $(x_0, y_0)$ *по переменной* $y$.

Будем придавать переменным $x$ и $y$ такие приращения $\Delta x$ и $\Delta y$, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ принадлежала области определения функции $z = f(x, y)$.

**Определение 6.13.** *Частными приращениями функции* $z = f(x, y)$ по переменным $x$ и $y$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называются соответственно величины

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \quad \Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

**Определение 6.14.** *Полным приращением функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ называется выражение

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Перефразируем определение непрерывности функции на «языке приращений».

**Определение 6.15.** Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если ее полное приращение есть величина бесконечно малая, когда приращения независимых переменных стремятся к нулю, т.е.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$



Непрерывность функции $f(x, y)$ по одной из переменных $x$ или $y$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ означает справедливость одного из следующих равенств:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x z = 0, \quad \lim_{\Delta y \to 0} \Delta_y z = 0.$$

*Замечание* 6.2. Из непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ следует ее непрерывность по каждой из переменных $x$ и $y$ в этой точке. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В этом несложно убедиться на примере функции

$$z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{в точке } O(0, 0) \end{cases}$$

(см. пример 6.4).

### 6.1.4. Частные производные

**Определение 6.16.** Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определенную в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Зафиксировав переменную $y = y_0$, получим функцию одной переменной $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

то этот предел называется *частной производной функции* $z = f(x, y)$ *по переменной* $x$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ и обозначается:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad z'_x(x_0, y_0), \quad f'_x(x_0, y_0),$$

или короче:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \quad z'_x(M_0), \quad f'_x(M_0).$$

Аналогично определяется *частная производная по переменной y*:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \\ = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

*Замечание* 6.3. Из определения следует, что частную производную функции двух переменных следует вычислять как обычную производную функции одной переменной, считая вторую переменную постоянной.

Пример 6.8. Найти частные производные функции

$$z = x^3 y^2 + 2x \ln y + x^y.$$

Р е ш е н и е. При нахождении частной производной функции $z$ по $x$ считаем переменную $y$ постоянной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + 2 \ln y + y x^{y-1}.$$

Вычисляя производную $z$ по $y$, считаем постоянной переменную $x$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + 2\frac{x}{y} + x^y \ln x. \qquad \square$$

На поверхности, являющейся графиком функции $z = f(x, y)$, выберем точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 6.6). Построим сечение этой поверхности плоскостью $y = y_0$, параллельной координатной плоскости $Oyz$. Получим плоскую кривую, задаваемую уравнениями

$$y = y_0, \quad z = \varphi(x) = f(x, y_0).$$

Производная $\varphi'(x_0)$ функции одной переменной $\varphi(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к этой кривой. Но по определению частных производных верно также равенство $\varphi'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$.

Итак, если $\alpha$ — угол между осью $Ox$ и касательной, проведенной к кривой $z = f(x, y_0)$ в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, то $f_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha$. Аналогично $f_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$, где $\beta$ — угол между осью $Oy$ и касательной, проведенной к кривой $z = f(x_0, y)$ в точке $P_0$. В этом состоит *геометрический смысл частных производных.*



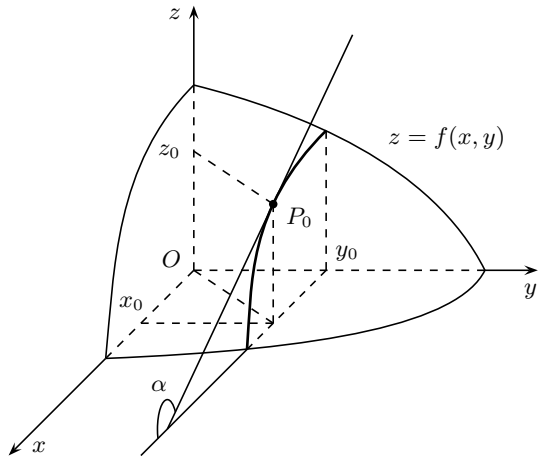


**Рис. 6.6**

## 6.1.5. Частные производные высших порядков

**Определение 6.17.** Предположим, что функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке $M(x, y)$ и в некоторой ее окрестности. Если функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ сами могут быть продифференцированы, то их частные производные по переменным $x$ и $y$ называются *частными производными второго порядка* и обозначаются следующим образом:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$
$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Пример 6.9. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 + 4x^2 y^3 + 10$.

Р е ш е н и е. Сначала находим частные производные первого порядка:

$$z'_x = 4x^3 + 8xy^3, \quad z'_y = 12x^2 y^2.$$

Затем находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \left(4x^3 + 8xy^3\right)'_x = 12x^2 + 8y^3, \qquad z''_{yy} = \left(12x^2y^2\right)'_y = 24x^2y,$$
$$z''_{xy} = \left(4x^3 + 8xy^3\right)'_y = 24xy^2, \qquad z''_{yx} = \left(12x^2y^2\right)'_x = 24xy^2. \quad \square$$

*Частные производные третьего* и *более высокого порядка* определяются и обозначаются аналогично. Например:

$$z'''_{xyx} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right), \quad z^{(7)}_{y^2x^5} = \frac{\partial^7 z}{\partial y^2\,\partial x^5} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^6 z}{\partial y^2\,\partial x^4}\right).$$

**Определение 6.18.** Частные производные по разным переменным, например $z''_{xy}$ и $z''_{yx}$, называются *смешанными*.

В примере 6.9 оказалось, что смешанные производные равны, т.е. $z''_{xy} = z''_{yx}$. Приводимая ниже теорема Шварца утверждает, что это не простое совпадение.

**Теорема 6.1 (Шварца).** *Если частные производные порядка $n$ непрерывны, то смешанные производные того же порядка, различающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.*

### 6.1.6. Дифференцируемость и дифференциал

**Определение 6.19.** Функция $z = f(x, y)$, определенная в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, называется *дифференцируемой в точке* $M_0$, если ее полное приращение в этой точке

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

представимо в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \qquad (6.1)$$

где $A$, $B$ — постоянные, не зависящие от $\Delta x$ и $\Delta y$; $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

**Теорема 6.2 (необходимое условие дифференцируемости).** *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$,*



*т.е. ее полное приращение может быть записано в виде* (6.1)*, то она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные*

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = B. \qquad (6.2)$$

Доказательство. Непрерывность функции $z$ следует из того, что, согласно равенству (6.1),

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} A\Delta x + \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} B\Delta y + \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y = A\cdot 0 + B\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0.$$

Чтобы исследовать существование частной производной по $x$ функции $z$, зафиксируем переменную $y$. Тогда $\Delta y = 0$, и на основании формулы (6.1) частное приращение

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x.$$

По определению частных производных

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\Big(A + \alpha(\Delta x, 0)\Big) = A + 0 = A.$$

Аналогично доказывается вторая из формул (6.2). $\square$

*Замечание* 6.4. Приводимый ниже пример показывает, что теорему 6.2 нельзя обратить, т.е. из непрерывности функции и существования всех ее частных производных, вообще говоря, не следует дифференцируемость.

Пример 6.10. В примере 6.6 мы установили, что функция

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{в точке } O(0,0) \end{cases}$$

непрерывна во всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Во всех точках, кроме начала координат, функция $z$ имеет частные производные, будучи элементарной. В начале координат

$$z'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\dfrac{(\Delta x)^2\cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично $z'_y(0,0)=0$.

Итак, функция $z$ непрерывна и имеет частные производные во всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

Если функция $z$ дифференцируема в начале координат, то по формулам (6.1) и (6.2) ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z=\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)$ — бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

Приняв $\Delta x=\Delta y$ и подсчитав, что при этом

$$\Delta z=\frac{(\Delta x)^2\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}-0=\frac{\Delta x}{2},$$

получим соотношение

$$\frac{\Delta x}{2}=\alpha(\Delta x,\Delta x)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta x)\Delta x.$$

После сокращения на $\Delta x$ приходим к равенству

$$\alpha(\Delta x,\Delta x)+\beta(\Delta x,\Delta x)=\frac{1}{2},$$

противоречащему тому факту, что $\alpha$ и $\beta$ — бесконечно малые. Таким образом, функция $z$ не дифференцируема в начале координат.

**Теорема 6.3 (достаточное условие дифференцируемости).** *Если функция $z=f(M)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $M_0$, непрерывные в точке $M_0$, то эта функция дифференцируема в точке $M_0$.*

**Определение 6.20.** *Дифференциалом $dz$* дифференцируемой функции $z=f(x,y)$ называется главная линейная относительно $\Delta x$ и $\Delta y$ часть полного приращения (6.1):

$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$

Из соотношений (6.2) следует, что

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{6.3}$$



Полагая в формуле (6.3) $z(x,y)=x$, получаем:

$$dz=dx=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y=\Delta x.$$

Таким образом, $dx=\Delta x$. Аналогично $dy=\Delta y$. Эти рассуждения позволяют переписать дифференциал (6.3) в виде

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \tag{6.4}$$

Форма записи дифференциала (6.4) наиболее распространена.

Пример 6.11. Найти дифференциал функции $z=e^{x^3y}$.

Р е ш е н и е. Находим сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x^2y}2xy,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2y}x^2.$$

По формуле (6.4) искомый дифференциал

$$dz=e^{x^2y}2xy\,dx+e^{x^2y}x^2\,dy=e^{x^2y}(2xy\,dx+x^2\,dy).$$ □

## 6.1.7. Производная сложной функции

**Теорема 6.4 (о производной сложной функции).** *Если $z=f(x,y)$ — дифференцируемая по переменным $x$, $y$ функция и $x(t)$, $y(t)$ — функции, дифференцируемые по переменной $t$, то сложная функция $z(t)=f(x(t),y(t))$ также дифференцируема. При этом ее производная может быть вычислена по формуле*

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{6.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Придадим переменной $t$ приращение $\Delta t$. Тогда переменные $x=x(t)$ и $y=y(t)$ получат приращения $\Delta x$ и $\Delta y$, которые, в свою очередь, вызовут приращение $\Delta z$ функции $z=f(x,y)$. Так как функция $z$ дифференцируема, то по формулам (6.1) и (6.2) ее полное приращение

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

Функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы, а следовательно, непрерывны, поэтому их приращения $\Delta x$ и $\Delta x$ стремятся к нулю, когда $\Delta t$ стремится к нулю. Значит,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta x,\Delta y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha(\Delta x,\Delta y)=0,\qquad \lim_{\Delta t\to 0}\beta(\Delta x,\Delta y)=0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}&=\frac{\partial z}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\\ &+\lim_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta x,\Delta y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\beta(\Delta x,\Delta y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\\ &=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}+0\frac{dx}{dt}+0\frac{dy}{dt},\end{aligned}$$

откуда и следует справедливость доказываемой формулы (6.5). □

*Замечание* 6.5. Требование дифференцируемости функции $z$ в теореме 6.4 является существенным. Действительно, формула (6.5) теряет силу, например, для рассмотренной в примере 6.10 функции

$$z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{в точке } O(0,0).\end{cases}$$

Эта функция непрерывна, имеет равные нулю частные производные, но не дифференцируема в начале координат. Если положить $x=t$ и $y=t$, то по формуле (6.5) получим:

$$z'(0)=z'_x(0,0)x'(0)+z'_y(0,0)y'(0)=0\cdot 1+0\cdot 1=0.$$

Но на самом деле $z'(t)=\left(\dfrac{t^2\,t}{t^2+t^2}\right)'=\left(\dfrac{t}{2}\right)'=\dfrac{1}{2}$ для всех $t\in\mathbb{R}$.

### 6.1.8. Производная по направлению. Градиент

Выберем на плоскости точку $M_0(x_0,y_0)$. Построим луч $l$, выходящий из точки $M_0$. Тем самым мы зададим в точке $M_0$ *направление* $l$ (рис. 6.7).



**Определение 6.21.** Луч, задающий направление $l$, образует с положительными направлениями осей координат $Ox$ и $Oy$ углы $\alpha$ и $\beta$. Величины $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ называются *направляющими косинусами* направления $l$ (рис. 6.7).

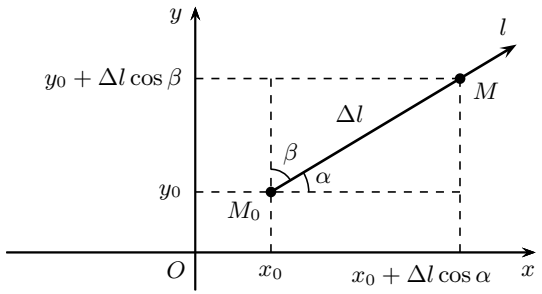


**Рис. 6.7**

Так как $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$, то

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

Точка $M(x,y)$, расположенная от $M_0(x_0,y_0)$ на расстоянии $\Delta l$ в направлении $l$, имеет координаты

$$x=x_0+\Delta l\cos\alpha,\quad y=y_0+\Delta l\cos\beta. \tag{6.6}$$

Введем в рассмотрение единичный вектор $\mathbf{e}=(\cos\alpha,\cos\beta)$. Тогда соотношения (6.6) можно переписать в виде

$$M=M_0+\Delta l\cdot\mathbf{e}. \tag{6.7}$$

Итак, любое направление задается некоторым единичным вектором. С другой стороны, всякий единичный вектор $\mathbf{e}$ задает некоторое направление $l$ по формуле (6.7). Таким образом, понятия направления и единичного вектора могут быть отождествлены.

**Определение 6.22.** *Приращением функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ по направлению $l$* называется величина

$$\begin{aligned}\Delta_l z&=f(M_0+\Delta l\cdot\mathbf{e})-f(M_0)=\\ &=f(x_0+\Delta l\cos\alpha,y_0+\Delta l\cos\beta)-f(x_0,y_0),\end{aligned} \tag{6.8}$$

где $\mathbf{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ — единичный вектор направления $l$ (рис. 6.8).

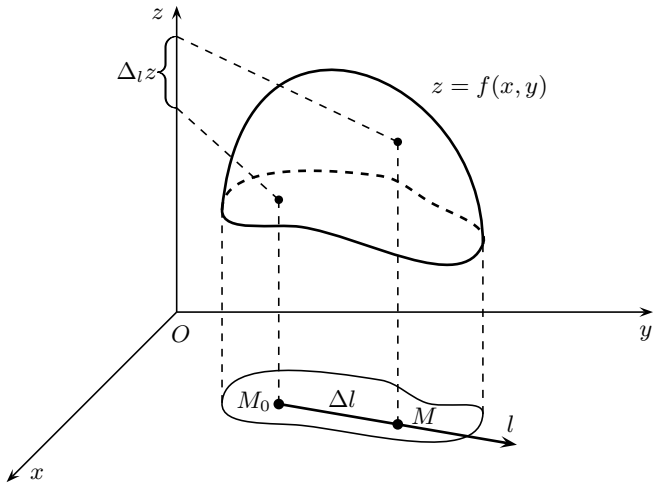


**Рис. 6.8**

**Определение 6.23.** Пусть направление $l$ задается единичным вектором $\mathbf{e}$. *Производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0$ по направлению $l$* называется предел отношения приращения этой функции в точке $M_0$ по направлению $l$ к величине $\Delta l$ при стремлении последней к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(M_0 + \Delta l \cdot \mathbf{e}) - f(M_0)}{\Delta l}.$$

*Замечание* 6.6. Величина $\frac{\partial f}{\partial l}$ характеризует быстроту изменения функции $f(x, y)$ в точке $M_0$ по направлению $l$.

Если направление $l$ совпадает с положительным направлением оси $Ox$, то производная по направлению $\frac{\partial f}{\partial l}$ совпадает с частной производной функции $f(x, y)$ по переменной $x$. Если $l$ совпадает с положительным направлением оси $Oy$, то $\frac{\partial f}{\partial l}$ есть частная производная функции $f(x, y)$ по $y$.



**Теорема 6.5.** *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то ее производная по направлению $l$ существует и может быть вычислена по формуле*

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta. \tag{6.9}$$

Доказательство. Для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ справедливы формулы (6.1) и (6.2), позволяющие представить приращение по направлению (6.8) в виде

$$\Delta_l z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta l\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta l\cos\beta + \gamma(\Delta l)\Delta l,$$

где $\gamma(\Delta l)$ — бесконечно малая функция при $\Delta l \to 0$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \lim_{\Delta l\to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta + \gamma(\Delta l)\right) = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

□

Пример 6.12. Вычислить производную функции $z = x^2 + xy^2$ в точке $A(1, 2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, если известна точка $B(3, 0)$.

Решение. Найдем единичный вектор $\mathbf{e}$, имеющий заданное направление:

$$\overrightarrow{AB} = (2, -2), \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \quad \mathbf{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Выпишем направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Вычислим частные производные функции $z$ в точке $A(1, 2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = 6, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = 4.$$

По формуле (6.9) получим: $\frac{\partial z}{\partial l} = 6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. □

**Определение 6.24.** *Градиентом* функции $z = f(x, y)$ называется вектор, координаты которого равны частным производным этой функции:

$$\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Если направление $l$ задано единичным вектором $\mathbf{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, то по формуле (6.9)

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha, \cos\beta) = \operatorname{grad} z \cdot \mathbf{e},$$

что свидетельствует о справедливости следующего утверждения.

**Теорема 6.6.** *Производная по направлению есть скалярное произведение градиента и единичного вектора, задающего это направление.*

*Замечание* 6.7. Как известно, скалярное произведение двух векторов максимально, если они одинаково направлены. Следовательно, градиент характеризует направление и величину максимального роста функции в выбранной точке, причем упомянутая величина равна

$$|\operatorname{grad} z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

*Замечание* 6.8. Умея находить градиент, можно с некоторой погрешностью строить линии уровня функции. Вдоль своей линии уровня функция не меняется, а по направлению градиента растет с максимальной скоростью. Это наглядно иллюстрирует тот факт, что градиент перпендикулярен линии уровня. Строгое математическое доказательство данного утверждения мы опускаем.

С учетом сделанного замечания линии уровня можно строить следующим образом. Выбирается, вообще говоря, произвольно, некоторая точка $M_0$. Строится градиент в этой точке. Задается направление, перпендикулярное градиенту. Строится небольшой участок линии уровня. Рассматривается близкая к $M_0$ точка $M_1$ и строится градиент в ней. Далее построения повторяются.



Пример 6.13. Найти направление и величину максимального роста функции $z = 3x^2 + xy - 2y^2$ в точке $A(2, 1)$.

Р е ш е н и е. Вычислим частные производные функции $z$ в точке $A$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(2,1) = 13, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(2,1) = -2.$$

Отсюда $\operatorname{grad} z(2,1) = (13, -2)$. Этот вектор задает искомое направление максимального роста. Величина максимального роста

$$\left|\operatorname{grad} z(2,1)\right| = \left|(13,-2)\right| = \sqrt{13^2 + 2^2} = \sqrt{173}. \qquad \square$$

### 6.1.9. Производственная функция Кобба — Дугласа

Как мы уже знаем, производственная функция (ПФ) выражает зависимость объема производства от величины затраченных ресурсов.

**Определение 6.25.** Производственная функция одной переменной называется *однoресурсной*.

В ряде случаев ПФ может быть сведена к зависимости *производительности труда* $y$, т.е. выпуска продукта в расчете на одного работника, от *капиталовооруженности труда* $x$, т.е. величины капитала в расчете на одного работника. Капиталовооруженность $x$ может быть найдена по формуле $x = K/L$, где $K$ — величина капитала, $L$ — затраты труда.

Возникновение теории производственных функций относится к 1928 г., когда появилась статья американских ученых Д. Кобба и П. Дугласа, в которой впервые была введена функция, ныне известная как производственная функция Кобба — Дугласа.

**Определение 6.26.** Функция

$$F(K, L) = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad a > 0,\ 0 < \alpha < 1,$$

выражающая зависимость объема выпускаемой продукции от объема основных фондов $K$ и затрат труда $L$, называется *производственной функцией Кобба — Дугласа*.

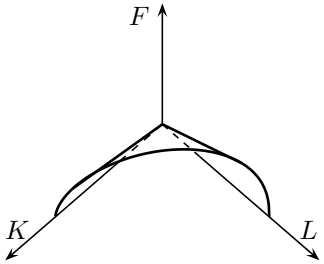


**Рис. 6.9**

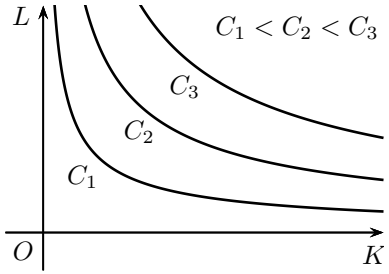


**Рис. 6.10**

График производственной функции Кобба — Дугласа в трехмерном пространстве есть коническая поверхность (рис. 6.9).

Для функции Кобба — Дугласа линии уровня, соответствующие константе $C > 0$, задаются уравнением $aK^\alpha L^{1-\alpha} = C$, или

$$L = \left(\frac{C}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Линии уровня производственной функции $F(K, L)$ для различных значений $C$ изображены на рис. 6.10. Точки $(K, L)$, лежащие на одной линии уровня, соответствуют различным наборам затрат, обеспечивающим один и тот же выпуск продукции.

**Определение 6.27.** Линии уровня производственной функции называются *изоквантами*.

Отметим, что изокванта, соответствующая значению $C_3$, расположена «северо-восточнее» изокванты, соответствующей значению $C_2$ (рис. 6.10).

Выясним, какую экономическую интерпретацию можно дать частным производным ПФ. Отношение

$$\frac{F(K_0 + \Delta K, L_0) - F(K_0, L_0)}{\Delta K}$$

показывает, какой дополнительный выпуск приходится на единицу изменения основных фондов $K_0$ при постоянных затратах труда $L_0$. Если существует конечный предел указанного выше отношения при



$\Delta K \to 0$, то это есть частная производная функции $F(K, L)$ по переменной $K$:

$$\frac{\partial F}{\partial L}(K_0, L_0) = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{F(K_0 + \Delta K, L_0) - F(K_0, L_0)}{\Delta K}.$$

**Определение 6.28.** Частная производная $\partial F/\partial K$ производственной функции $F$ называется *предельной фондоотдачей*.

**Определение 6.29.** Частную производную $\partial F/\partial L$ производственной функции $F$ называют *предельной производительностью труда*.

Для производственной функции Кобба — Дугласа предельные фондоотдача и производительность труда соответственно равны:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}\left(aK^\alpha L^{1-\alpha}\right) = a\alpha\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha},$$
$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(aK^\alpha L^{1-\alpha}\right) = a(1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}.$$

**Определение 6.30.** *Эластичностью функции* $z = f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0)$ по переменным $x$ и $y$ называются соответственно пределы

$$E_{zx}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta_x z}{z}}{\frac{\Delta x}{x}}, \quad E_{zy}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\Delta_y z}{z}}{\frac{\Delta y}{y}}.$$

Из определения эластичности следует, что

$$E_{zx}(x_0, y_0) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad E_{zy}(x_0, y_0) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

*Замечание* 6.9. Эластичность приближенно показывает, на сколько процентов изменится выпуск, если затраты какого-либо одного ресурса увеличатся на 1% при неизменных объемах другого ресурса.

Для производственной функции Кобба — Дугласа $F(K,L)$

$$E_{FK}(K_0,L_0)=\frac{K_0}{F(K_0,L_0)}\frac{\partial F}{\partial K}(K_0,L_0)=\frac{K_0}{aK_0^{\alpha}L_0^{1-\alpha}}a\alpha\left(\frac{L_0}{K_0}\right)^{1-\alpha}=\alpha,$$

$$E_{FL}(K_0,L_0)=\frac{L_0}{F(K_0,L_0)}\frac{\partial F}{\partial L}(K_0,L_0)=$$

$$=\frac{L_0}{aK_0^{\alpha}L_0^{1-\alpha}}\ a(1-\alpha)\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{\alpha}=1-\alpha.$$

Сформулируем экономический смысл параметра $\alpha$ функции Кобба — Дугласа. Эластичность выпуска по основным фондам равна $\alpha$. Значит, относительное изменение основных фондов на 1% вызывает изменение выпуска приблизительно на $\alpha$%.

## 6.2. Экстремум функции двух переменных

### 6.2.1. Локальный экстремум

**Определение 6.31.** Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется *точкой локального максимума функции* $z=f(x,y)$, если существует такая окрестность $M_0$, для любой точки $M(x,y)$ которой выполняется неравенство $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$, и *точкой локального минимума*, если существует окрестность точки $M_0$, где $f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)$.

**Определение 6.32.** Точки локального максимума и локального минимума называются *точками локального экстремума.*

В начале координат верхняя часть полусферы (см. рис. 6.2) имеет *гладкий локальный максимум*, параболоид $z=x^2+y^2$ (см. рис. 6.3) — *гладкий локальный минимум*, конус (рис. 6.11) — *острый локальный минимум.*

**Теорема 6.7 (необходимое условие локального экстремума).** *Если дифференцируемая в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $z=f(x,y)$ имеет в этой точке локальный экстремум, то обе ее частные производные в $M_0$ обращаются в нуль:*

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=0. \tag{6.10}$$



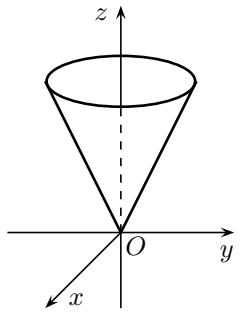


**Рис. 6.11**

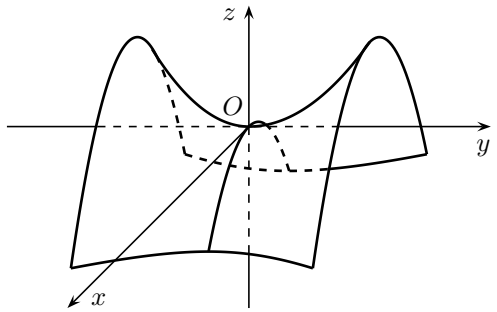


**Рис. 6.12**

*Замечание* 6.10. Необходимое условие экстремума не является достаточным. Например, частные производные функции $z=y^2-x^2$ равны нулю в точке $M_0(0,0)$, однако эта функция не имеет экстремума в указанной точке. В самом деле, значение функции $z$ в точке $M_0$ равно нулю, но в сколь угодно малой окрестности $M_0$ функция принимает как положительные, так и отрицательные значения. Если, например, $x=0$, то $z=y^2>0$, если $y=0$, то $z=-x^2<0$.

Графиком функции $z=y^2-x^2$ является *гиперболический параболоид* (рис. 6.12), для которого $M_0$ — это так называемая *седловая точка.*

**Определение 6.33.** Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума (6.10), будем называть *стационарными точками.*

**Теорема 6.8 (достаточное условие локального экстремума).** *Пусть в стационарной точке $M_0(x_0,y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Положим*

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0),\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_0),\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0),\qquad \Delta=AC-B^2.$$

*В этих обозначениях:*

1) *если $\Delta>0$, то в точке $M_0$ функция $z$ имеет экстремум, причем при $A<0$ либо $C<0$ это локальный максимум; при $A>0$ либо $C>0$ это локальный минимум;*
2) *если $\Delta<0$, то в точке $M_0$ экстремума нет;*

3) *если* $\Delta = 0$, *то нужны дополнительные исследования, поскольку экстремум может быть, а может и отсутствовать.*

Следующие два примера иллюстрируют п. 3 теоремы.

Пример 6.14. Для функции $z = x^4 + y^4$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3.$$

Значит, точка $M_0(0,0)$ является стационарной. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2,$$

то в точке $M_0$ имеем: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Таким образом, $\Delta = 0$. При этом $M_0$ — точка минимума функции $z$, поскольку $z(M_0) = 0$ и на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ верно неравенство $z(x,y) \geqslant 0$.

Пример 6.15. Для функции $z = x^3 + y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Таким образом, $M_0(0,0)$ — стационарная точка, для которой $\Delta = 0$.

В данном случае $z(M_0) = 0$ и в каждой окрестности точки $M_0$ есть точки вида $M(x,0)$, в которых функция $z$ равна $x^3$ и потому принимает положительные значения для $x > 0$ и отрицательные для $x < 0$.

Итак, в любой окрестности точки $M_0$ функция $z$ принимает значения, как бóльшие, так и меньшие $z(M_0)$. Значит, в точке $M_0$ экстремума нет.

Пример 6.16. Найти точки локального экстремума функции

$$z = x^4 + y^4 - xy.$$

Р е ш е н и е. Находим сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - x.$$



Согласно необходимому условию локального экстремума экстремум возможен только в тех точках, где частные производные равны нулю. Составим и решим соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x^3 - y = 0, \\ 4y^3 - x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 4x^3, \\ 4(4x^3)^3 - x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 4x^3, \\ x(256x^8 - 1) = 0. \end{cases}$$

Имеем три стационарные точки: $M_1(0,0)$, $M_2(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $M_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Найдем частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2.$$

Отсюда $\Delta = AC - B^2 = 144x^2y^2 - 1$.

Вычислим значение $\Delta$ в каждой стационарной точке. Так как

$$\Delta(M_1) = \Delta(0,0) = -1 < 0,$$

то в точке $M_1$ нет экстремума. Далее:

$$\Delta(M_2) = \Delta\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 8 > 0, \quad A(M_2) = A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) > 0,$$

поэтому $M_2$ — точка локального минимума. Наконец,

$$\Delta(M_3) = \Delta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 8 > 0, \quad A(M_3) = A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Значит, $M_3$ — точка локального минимума. □

### 6.2.2. Глобальный экстремум

В прикладных дисциплинах часто встречаются задачи на отыскание *глобального экстремума*, когда требуется вычислить наибольшее и наименьшее значения функции в некоторой области двухмерного пространства, ограниченной заданным набором линий.

Глобальный экстремум может достигаться либо внутри, либо на границе области. В первом случае экстремум окажется также локальным и для него будет выполнено необходимое условие экстремума (6.10). Из сказанного становится ясно, что для отыскания глобального экстремума следует:

1) найти стационарные точки, расположенные внутри области, и вычислить значения функции в них;
2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;
3) из всех найденных значений выбрать самое большое и самое маленькое.

Пример 6.17. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x + 2y = 8$.

Р е ш е н и е. Прямая $x + 2y = 8$ пересечет ось $Oy$ в точке $A(0, 4)$, а ось $Ox$ — в точке $B(8, 0)$. Таким образом, функцию $z$ мы будем исследовать в треугольнике $OAB$ (рис. 6.13).

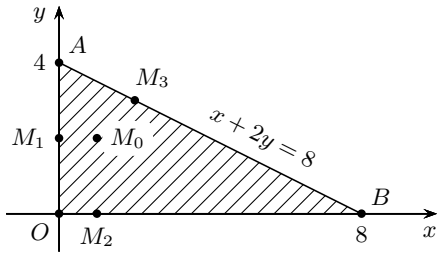


**Рис. 6.13**

Находим стационарные точки внутри треугольника $OAB$:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 4y - 8 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 2, \\ 4y = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Имеем единственное решение $M_0(1, 2)$. Вычисляем значение функции $z$ в стационарной точке $M_0$:

$$z(M_0) = z(1, 2) = 1^2 + 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 1 - 8 \cdot 2 = 1 + 8 - 2 - 16 = -9.$$

Теперь исследуем функцию $z$ на каждой из сторон треугольника $OAB$ в отдельности. На стороне $OA$, задаваемой уравнением $x = 0$,



функция $z$ принимает вид $z_{OA} = 2y^2 - 8y$, где $y \in [0, 4]$. Находим стационарные точки функции одной переменной $z_{OA}$:

$$z'_{OA}(y) = 0, \quad 4y - 8 = 0, \quad 4y = 8, \quad y = 2.$$

Корню $y = 2$ соответствует точка $M_1(0, 2)$ на стороне $OA$. Вычисляем значения функции $z$ в точке $M_1$, а также на концах $O$ и $A$ стороны $OB$:

$$z(M_1) = z_{OA}(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 = -8,$$
$$z(O) = z_{OA}(0) = 0, \quad z(A) = z_{OA}(4) = 2 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 = 0.$$

Сторона $OB$ задается уравнением $y = 0$. На ней функция $z$ принимает вид $z_{OB} = x^2 - 2x$, где $x \in [0, 8]$. Находим стационарные точки функции $z_{OB}$:

$$z'_{OB}(x) = 0, \quad 2x - 2 = 0, \quad 2y = 2, \quad x = 1.$$

Имеем точку $M_2(1, 0)$. Так как значение $z(O)$ нам уже известно, осталось вычислить $z(M_2)$ и $z(B)$:

$$z(M_2) = z_{OB}(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1, \quad z(B) = z_{OB}(8) = 8^2 - 2 \cdot 8 = 48.$$

На стороне $AB$ имеем $x = 8 - 2y$, следовательно, функция $z$ принимает вид

$$z_{AB} = (8 - 2y)^2 + 2y^2 - 2(8 - 2y) - 8y = 6y^2 - 36y + 48, \quad y \in [0, 4].$$

Ищем стационарные точки функции $z_{AB}$:

$$z'_{AB}(y) = 0, \quad 12y - 36 = 0, \quad 12y = 36, \quad y = 3.$$

Получена точка $M_3(2, 3)$, для которой

$$z(M_3) = z_{AB}(3) = 6 \cdot 3^2 - 36 \cdot 3 + 48 = -6.$$

Сравнивая найденные значения, приходим к выводу, что

$$z_{\min} = z(M_0) = -9, \quad z_{\max} = z(B) = 48. \qquad \square$$

### 6.2.3. Условный экстремум

Начнем рассмотрение понятия *условного экстремума* с конкретного примера.

Пример 6.18. Найти минимум и максимум функции $z = x - y$ на единичной окружности, т.е. при условии, что координаты $x$ и $y$ связаны соотношением $x^2 + y^2 = 1$.

Р е ш е н и е. Геометрически эта задача означает, что на эллипсе, полученном при пересечении цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ плоскостью $z = x - y$, требуется найти максимальное и минимальное значения аппликаты $z$ (рис. 6.14).

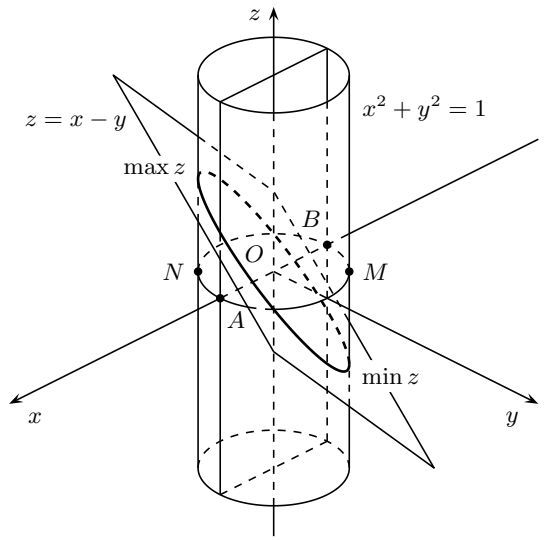


**Рис. 6.14**

Точками $A(1, 0)$ и $B(-1, 0)$ разделим окружность $x^2 + y^2 = 1$ на две полуокружности, каждую из которых можно представить в явном виде следующим образом:

$$y_1 = \sqrt{1 - x^2}, \quad y_2 = -\sqrt{1 - x^2}, \qquad x \in [-1, 1].$$



На первой полуокружности имеем:

$$z_1(x) = x - y_1(x) = x - \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Ищем стационарные точки функции $z_1$ на интервале $(-1, 1)$:

$$z_1'(x) = 0, \quad 1 + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0, \quad \frac{\sqrt{1 - x^2} + x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0.$$

Отсюда

$$x = -\sqrt{1 - x^2}, \quad \begin{cases} x^2 = 1 - x^2, \\ x < 0, \end{cases} \qquad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Этой стационарной точке соответствует точка $M(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ первой полуокружности. Вычисляем значения функции $z$ в точке $M$ и на концах $A$ и $B$:

$$z(M) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}, \quad z(A) = 1 - 0 = 1, \quad z(B) = -1 - 0 = -1.$$

Аналогичным образом исследуя вторую полуокружность, приходим к точке $N(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, для которой $z(N) = \sqrt{2}$. Сравнивая значения функции $z$ в точках $A$, $B$, $M$ и $N$, находим, что максимум достигается в точке $N$ и равен $\sqrt{2}$, минимум достигается в точке $M$ и равен $-\sqrt{2}$. □

**Определение 6.34.** Отыскание *условного экстремума* — это задача о нахождении экстремума целевой функции $z = f(x, y)$ при условии, что переменные $x$ и $y$ подчиняются ограничению $g(x, y) = 0$, называемому *уравнением связи*.

**Определение 6.35.** Точка $M_0(x_0, y_0)$, удовлетворяющая уравнению связи $g(x, y) = 0$, называется *точкой локального условного максимума функции* $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки $M_0$, что для любых точек $M$ из этой окрестности, удовлетворяющих уравнению связи $g(x, y) = 0$, выполнено неравенство $f(M) \leqslant f(M_0)$.

Аналогично при определении *точки локального условного минимума* требуется выполнение неравенства $f(M) \geqslant f(M_0)$.

### 6.2.4. Метод множителей Лагранжа

На примере 6.18 мы могли убедиться, что задача нахождения условного экстремума может быть сведена к задаче нахождения экстремума функции одной переменной. Такой подход, однако, имеет следующие недостатки:

1) из уравнения связи приходится находить явное выражение одной переменной через другую, что может быть весьма сложной, а иногда и неразрешимой задачей;
2) функцию приходится исследовать в искусственно выбираемых точках, с помощью которых линия, задаваемая уравнением связи, разбивается на части.

Преодолеть указанные недостатки позволяет так называемый метод множителей Лагранжа.

**Определение 6.36.** Функция переменных $x$, $y$ и $\lambda$

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

где $g(x, y)$ — уравнение связи, называется *функцией Лагранжа*, а $\lambda$ — *множителем Лагранжа*.

*Метод множителей Лагранжа* состоит в применении следующей теоремы.

**Теорема 6.9.** *Если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой условного экстремума функции $z = f(x, y)$ на множестве, определяемом уравнением связи $g(x, y) = 0$, то существует такое значение $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, при котором точка $(x_0, y_0, \lambda_0)$ является точкой безусловного экстремума функции Лагранжа $L(x, y, \lambda)$.*

Согласно теореме 6.9 для нахождения точек, подозрительных на локальный экстремум, следует решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0. \end{cases} \tag{6.11}$$



Пример 6.19. Решить пример 6.18, применяя метод множителей Лагранжа.

Р е ш е н и е. В данном случае уравнение связи имеет вид

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Выпишем и решим систему (6.11):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -1 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{1}{2\lambda}, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Подставим $x$ и $y$ в последнее уравнение:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1, \quad 2\lambda^2 = 1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Корням $\lambda_1$ и $\lambda_2$ соответствуют точки

$$M\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad N\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

значения $z(M) = -\sqrt{2}$ и $z(N) = \sqrt{2}$ в которых являются искомыми минимумом и максимумом функции $z$. □

### 6.2.5. Экстремум выпуклых функций

**Определение 6.37.** Множество $B \subset \mathbb{R}^2$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими точками $a$ и $b$ оно целиком содержит соединяющий их отрезок.

На рис. 6.15 изображены выпуклые множества, а на рис. 6.16 — множества, не обладающие свойством выпуклости.

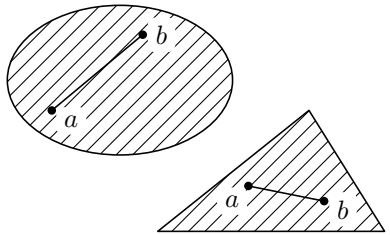


Рис. 6.15

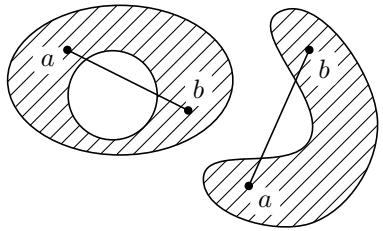


Рис. 6.16

**Определение 6.38.** Функция, заданная на выпуклом множестве $B$, называется *выпуклой вниз*, если все точки графика этой функции, соответствующие произвольному отрезку $[a, b]$ из множества $B$, лежат не выше хорды, соединяющей точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$.

Аналогично функция называется *выпуклой вверх*, если для всякого отрезка из множества $B$ график функции в точках этого отрезка лежит не ниже соответствующей хорды (рис. 6.17).

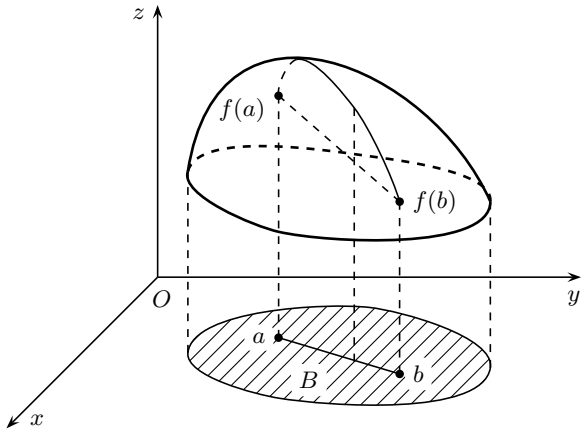


Рис. 6.17

Можно доказать, что для выпуклой функции равенство нулю частных производных является не только необходимым, но и достаточным условием экстремума. Более того, экстремум выпуклой функции является *глобальным*, т.е. *наименьшим значением* во всей области определения в случае функции, выпуклой вниз, и *наибольшим* — в случае функции, выпуклой вверх.



### 6.2.6. Функция полезности

В основе модели поведения потребителей лежит гипотеза, что каждый из них, выбирая набор благ при заданных ценах и имеющемся доходе, стремится максимизировать уровень удовлетворения своих потребностей.

Пусть на рынке потребителю предлагается $n$ различных благ. Через $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i$ — количество $i$-го блага в натуральных единицах, будем обозначать конкретный набор благ. Блага приобретаются по рыночным ценам $p_1$, $p_2$, …, $p_n$ соответственно. Стоимость набора благ есть сумма

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

В распоряжении потребителя имеется ограниченное количество денег $R$ (доход), поэтому существует *бюджетное ограничение*

$$\sum_{i=1}^{n} p_ix_i \leqslant R.$$

*Полезность блага* — это способность удовлетворять ту или иную потребность. Потребитель выбирает наиболее предпочтительный набор среди всех доступных.

В XIX в. была введена функция полезности $u$ для предпочтения одного набора другому. Основное ее свойство в том, что потребитель предпочитает набор $X$, а не $Y$, если $u(X) > u(Y)$. Таким образом, функция полезности упорядочивает наборы имеющихся благ по предпочтению.

**Определение 6.39.** *Функция полезности* $u = u(x, y)$, заданная на пространстве двух благ (товаров), — это субъективная числовая оценка полезности набора товаров $(x, y)$.

**Определение 6.40.** Линии уровня функции полезности называют *кривыми безразличия* (рис. 6.18).

Если $u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2)$, то потребителю безразлично, каким набором обладать, потому что они имеют одинаковую полезность. Чем «северо-восточнее» расположена кривая безразличия, тем большему уровню она соответствует (рис. 6.18). Кривые безразличия являются убывающими.

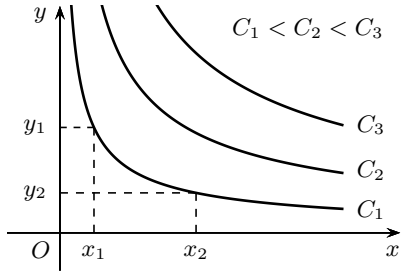


**Рис. 6.18**

В теории потребительского выбора большую роль играют предельные полезности.

**Определение 6.41.** *Предельные полезности* выражают дополнительное удовлетворение от потребления одной дополнительной единицы блага. Математически это описывается частными производными функции полезности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}.$$

Предельные полезности положительны, так как с увеличением потребления блага его полезность возрастает.

**Определение 6.42.** Вектор градиента функции полезности

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

координаты которого есть предельные полезности, называется *вектором предельных полезностей.*



Закон убывающей полезности гласит, что с увеличением потребления блага его предельная полезность убывает, т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0.$$

**Определение 6.43.** Если потребитель обладает доходом $R$, то множество всех наборов товаров стоимостью не более $R$ называется *бюджетным множеством. Граница бюджетного множества* — это множество наборов, которые сто́ят ровно $R$.

*Задача потребительского выбора* (ЗПВ), или *задача рационального поведения потребителя на рынке*, заключается в выборе такого набора товаров $x$ и $y$, который максимизирует функцию полезности при заданном бюджетном ограничении, т.е.

$$u(x, y) \to \max, \quad p_1 x + p_2 y \leqslant R, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,$$

где $p_1$, $p_2$ — цена первого и второго товаров соответственно.

Таким образом, на бюджетном множестве требуется найти точку, принадлежащую кривой безразличия с максимальным уровнем полезности. Графически поиск означает последовательный переход на линии все более высокого уровня полезности до тех пор, пока линии еще имеют общие точки с бюджетным множеством. Следовательно, искомая точка лежит на границе бюджетного множества. В ней кривая безразличия касается линии бюджетного ограничения. Следовательно, ЗПВ можно заменить задачей на условный экстремум

$$u(x, y) \to \max, \quad R - (p_1 x + p_2 y) = 0.$$

Так как функция полезности является выпуклой, то на бюджетном множестве существует единственная точка максимума функции полезности. Значит, у потребителя даже нет выбора в том, как с наибольшей пользой потратить свои деньги, поскольку существует единственный набор $(x^0, y^0)$, максимизирующий полезность.

**Определение 6.44.** Точка $(x^0, y^0)$ максимума функции полезности называется *точкой спроса* (рис. 6.19).

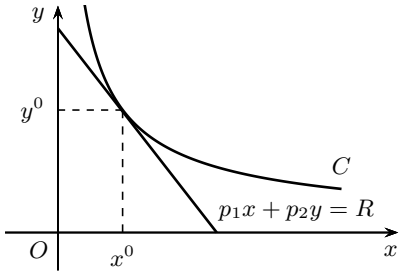


**Рис. 6.19**

Чтобы решить задачу на условный экстремум, построим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda(R - p_1x - p_2y),$$

для которой выпишем систему (6.11):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda(-p_1) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \lambda(-p_2) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = R - (p_1x + p_2y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \lambda p_2, \\ p_1x + p_2y = R, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1x + p_2y = R. \end{cases}$$

Отсюда можно сделать вывод, что:

1) точка спроса лежит на границе бюджетного множества;
2) в этой точке вектор предельных полезностей пропорционален вектору цен.

**Определение 6.45.** Координаты точки спроса есть функции параметров $p_1$, $p_2$, $R$. Они называются *функциями спроса на первый и второй товары* соответственно:

$$x^0 = x^0(p_1, p_2, R), \quad y^0 = y^0(p_1, p_2, R).$$

Это однородные функции нулевой степени относительно цен



и дохода, т.е. пропорциональное изменение цен и дохода не влечет изменения спроса на товары:

$$x^0(tp_1, tp_2, tR) = t^0x^0(p_1, p_2, R) = x^0(p_1, p_2, R),$$
$$y^0(tp_1, tp_2, tR) = t^0y^0(p_1, p_2, R) = y^0(p_1, p_2, R).$$

Пример 6.20. Найти точку спроса для функции полезности $u(x, y)$ при ценах на товары $p_1$ и $p_2$ и доходе $R$, если:

а) $u(x, y) = \min\{x, 2y\}$;
б) $u(x, y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

Р е ш е н и е. а) Функция $u(x, y) = \min\{x, 2y\}$ означает, что излишки первого и второго товаров сверх отношения $2 : 1$ не приносят пользы потребителю. Он получает бóльшую пользу только при увеличении потребления обоих товаров в пределах сохранения пропорции $2 : 1$. Товары с такой функцией полезности называются *взаимодополняемыми*. Составляем и решаем систему для нахождения точки спроса $(x^0, y^0)$:

$$\begin{cases} p_1x + p_2y = R, \\ x = 2y, \end{cases} \qquad x^0 = \frac{R}{2p_1 + p_2}, \quad y^0 = \frac{2R}{2p_1 + p_2}.$$

б) Рассмотрим систему уравнений для поиска точки спроса:

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1x + p_2y = R, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1x + p_2y = R, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1x + p_2y = R. \end{cases}$$

Видно, что $x^0 = \dfrac{R}{2p_1}$, $y^0 = \dfrac{R}{2p_2}$. □

# Глава 7

# Дифференциальные уравнения

## 7.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

### 7.1.1. Общее дифференциальное уравнение первого порядка

Многие процессы физики, химии, астрономии, биологии, экологии, экономики описываются некоторой зависимостью от независимой переменной $x$, функции $y = y(x)$ и ее производных, например скорости, ускорения, темпа роста. Тогда возникают математические модели процессов, описываемые дифференциальными уравнениями или их системами.

Пусть некоторый процесс описывается функцией $y = y(x)$, заданной и дифференцируемой на некотором интервале $(a, b)$. Эта функция неизвестна, но известна функциональная зависимость между независимой переменной $x$, $y(x)$ и ее производной $y'(x)$. Такая зависимость определяет дифференциальное уравнение.

**Определение 7.1.** *Дифференциальным уравнением* (ДУ) *первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0,$$

где $F$ — заданная функция трех переменных $x$, $y$, $y'$; $x$ — аргумент; $y = y(x)$ — искомая функция; $y' = y'(x)$ — ее производная.



**Определение 7.2.** Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y), \tag{7.1}$$

где $f$ — заданная функция двух переменных $x$, $y$, называется *разрешенным относительно* $y'$.

Дифференциальное уравнение (7.1) считается заданным в некоторой области $D$, если в этой области задана функция $f(x, y)$.

**Определение 7.3.** Уравнение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0,$$

где $x$, $y$ имеют тот же смысл, что и выше; $dx$, $dy$ — дифференциалы; $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — заданные функции, называется *уравнением, записанным в дифференциалах*.

В теории дифференциальных уравнений $y$ можно принять за аргумент, $x(y)$ — за функцию; $dy$, $dx = x'(y)\,d(y)$ — соответственно за дифференциалы.

**Определение 7.4.** *Решением ДУ* называется такая заданная и дифференцируемая на некотором интервале $(a, b)$ функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество при допустимых значениях $x$, например $F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$ или $y'(x) \equiv f(x, y(x))$.

Процесс нахождения всех решений ДУ называется *интегрированием ДУ*. График решения $y = y(x)$ ДУ называется *интегральной кривой этого уравнения*.

Пример 7.1. Проинтегрировать простейшее ДУ $y' = f(x)$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)\,dx \Rightarrow \int dy = \int f(x)\,dx \Rightarrow y = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — первообразная (неопределенный интеграл) функции $f(x)$; $C$ — произвольная постоянная. □

Приведенный пример показывает, что решение ДУ представляет собой целое семейство функций, зависящее от произвольного параметра $C$.

**Определение 7.5.** *Задачей Коши* или *начальной задачей* называют задачу нахождения решения $y = y(x)$ уравнения (7.1), удовлетворяющего *начальному условию*

$$y(x_0) = y_0. \tag{7.2}$$

*Геометрический смысл задачи Коши* состоит в том, что ищется интегральная кривая уравнения (7.1), проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости $Oxy$ (рис. 7.1).

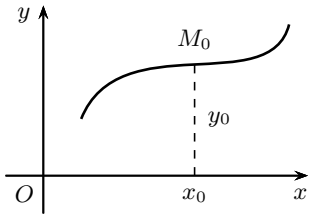


**Рис. 7.1**

Для дифференциальных уравнений важное значение имеет вопрос о существовании решения задачи Коши и единственность этого решения.

**Теорема 7.1 (Коши).** *Если правая часть уравнения* (7.1) *непрерывна и имеет непрерывную производную* $\frac{df}{dy}$ *в области* $D$*, то решение ДУ* (7.1) *с начальным условием* (7.2)*, где* $(x_0, y_0) \in D$*, существует и единственно, т.е. через точку* $(x_0, y_0) \in D$ *проходит единственная интегральная кривая данного уравнения.*

**Определение 7.6.** Если во всех точках решения $y = \psi(x)$ уравнения (7.1) условие единственности не выполняется, то такое решение называется *особым.*

Через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ графика особого решения кроме этого решения проходит и другое решение уравнения (7.1), которое не совпадает с $y = \psi(x)$ в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Для существования особого решения уравнения (7.1) необходимо, чтобы не выполнялись условия теоремы Коши.



Пример 7.2. Исследовать решение уравнения $y = 3y^{2/3}$.

Р е ш е н и е. Правая часть этого уравнения $f(x, y) = 3y^{2/3}$ определена и непрерывна во всех точках плоскости $Oxy$. Частная производная

$$\frac{df}{dy} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

обращается в бесконечность при $y = 0$, т.е. на оси $Ox$, так что при $y = 0$ нарушается одно из условий теоремы Коши.

Следовательно, в точках оси $Ox$ возможно нарушение единственности. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция $y = (x + C)^3$ (семейство кубических парабол) есть решение уравнения. Кроме того, данное уравнение имеет очевидное решение $y \equiv 0$ (рис. 7.2), которое нельзя получить из $y = (x + C)^3$ ни при каком значении $C$.

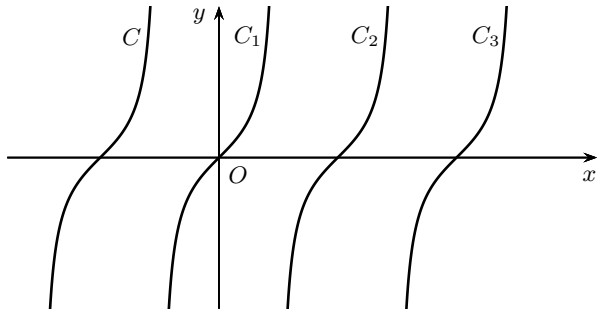


**Рис. 7.2**

Таким образом, через каждую точку оси $Ox$ проходят по крайней мере две интегральные кривые, следовательно, в точках этой оси нарушается единственность, т.е. $y = 0$ — особое решение исходного уравнения. □

**Определение 7.7.** *Общим решением ДУ* (7.1) называется функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{7.3}$$

зависящая от одной произвольной постоянной $C$ и такая, что выполняются условия:

1) она удовлетворяет уравнению (7.1) при любых допустимых значениях постоянной $C$;

2) каково бы ни было начальное условие (7.2), можно подобрать такое значение $C_0$ постоянной $C$, что решение $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять заданному начальному условию (7.2).

При этом предполагается, что точка $(x_0, y_0)$ принадлежит области $D$, где выполняются условия существования и единственности решения задачи Коши (7.1), (7.2).

**Определение 7.8.** *Частным решением ДУ* (7.1) называется решение, получаемое из общего решения (7.3) при каком-либо определенном значении произвольной постоянной $C$.

Пример 7.3. Проверить, является ли функция $y = Ce^x$ общим решением уравнения $y' - y = 0$, и найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = -1$.

Р е ш е н и е. Имеем: $y = Ce^x$ и $y' = Ce^x$. Подставляя в данное уравнение выражения $y$ и $y'$, получаем $Ce^x - Ce^x \equiv 0$, т.е. функция $y = Ce^x$ удовлетворяет данному уравнению при любых значениях постоянной $C$.

Зададим любое начальное условие $y(x_0) = y_0$. Подставляя в функцию $y = Ce^x$, будем иметь $y_0 = Ce^{x_0}$, откуда $C = y_0 e^{-x_0}$. Функция $y = y_0 e^{x-x_0}$ удовлетворяет данному начальному условию, поэтому функция $y = Ce^x$ — общее решение данного уравнения.

При $x_0 = 1$ и $y_0 = -1$ получим частное решение $y = -e^{x-1}$.

С геометрической точки зрения общее решение определяет семейство интегральных кривых, которыми являются графики показательных функций; частное решение есть интегральная кривая, проходящая через точку $M_0(1, -1)$ (рис. 7.3). □

Иногда общее решение ДУ в виде (7.3) найти нелегко. В связи с этим введем следующее определение.

**Определение 7.9.** Соотношение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно определяющее общее решение, называется *общим интегралом* ДУ первого порядка; соотношение, получаемое из общего интеграла при конкретном значении постоянной $C$, называется *частным интегралом* ДУ первого порядка.



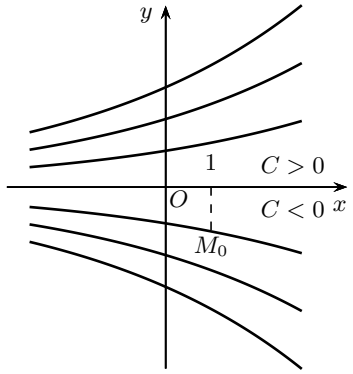


**Рис. 7.3**

### 7.1.2. Составление дифференциальных уравнений

К составлению и интегрированию ДУ приводят многие задачи математики и других наук — физики, биологии, химии, экономики и т.д.

В экономике ДУ часто может быть составлено исходя из экономического смысла производной. В качестве примера рассмотрим динамику рыночных цен (*макромодель Домара*), где независимой переменной служит время $t$. Допустим, что для конкретного продукта функции спроса $Q_d$ и предложения $Q_s$ имеют следующий вид:

$$Q_d = \alpha - \beta P, \quad Q_s = -\gamma + \delta P, \tag{7.4}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — некоторые положительные постоянные; $P = P(t)$ — цена продукта.

Цена равновесия $\overline{P}$ находится из условия $Q_d = Q_s$ и будет равна конкретной положительной постоянной: $\overline{P} = (\alpha + \gamma)/(\beta + \delta)$.

Если случится, что начальная цена $P(0)$ точно равна $\overline{P}$, то очевидно, что рынок находится в положении равновесия и динамический анализ не нужен. В более интересном случае $P(0) \neq \overline{P}$. Если $\overline{P}$ будет достижимой, то только после соответствующего процесса приспособления, во время которого меняется не только цена, но и $Q_d$, $Q_s$ как функции $P$, причем все эти переменные можно трактовать как функции времени. Поставим вопрос, который касается динамики цен, так:

пусть есть достаточно времени на то, чтобы произошел процесс приспособления; будет ли цена $P(t)$ со временем приведена к цене равновесия, т.е. будет ли $P(t)$ стремиться к $\overline{P}$, когда $t \to \infty$?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно сначала найти $P(t)$. Последнее, в свою очередь, требует описания структуры изменения цен. Вообще говоря, цены определяются через релятивное воздействие сил спроса и предложения на рынке. Для простоты допустим, что уровень (скорость) изменения цены (относительно времени) в каждый момент времени прямо пропорционален разности $Q_d - Q_s$ в этот момент. Такая структура изменения цены может быть выражена следующим образом:

$$\frac{dP}{dt} = j(Q_d - Q_s), \tag{7.5}$$

где $j$ — некоторый установленный положительный множитель (коэффициент) приспособления.

Подставим выражение (7.4) в формулу (7.5) и получим:

$$\frac{dP}{dt} = j(\alpha - \beta P + \gamma - \delta P) = j(\alpha + \gamma) - j(\beta\,\delta)P,$$

или

$$\frac{dP}{dt} + j(\beta + \delta)P = j(\alpha + \gamma). \tag{7.6}$$

Уравнение (7.6) и есть ДУ для цены продукта $P(t)$ в макромодели Домара. Решение уравнения (7.6) и его анализ будут приведены после изложения методов интегрирования ДУ первого порядка.

### 7.1.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ первого порядка, записанное в дифференциалах:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{7.7}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — заданные функции двух переменных $x$ и $y$.

**Определение 7.10.** Пусть $P(x, y) = P_1(x)$, $Q(x, y) = Q_2(y)$, тогда уравнение (7.7) называют *ДУ с разделенными переменными.*



Интегрируя, получаем общее решение

$$\int P_1(x)\,dx + \int Q_2(y)\,dy = C,$$

т.е. ДУ с разделенными переменными решается простым интегрированием.

**Определение 7.11.** Дифференциальное уравнение первого порядка (7.1) или (7.7) называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно представить в виде

$$y' = f_1(x)\,f_2(y)$$

или

$$P_1(x)P_2(y)\,dx + Q_1(x)Q_2(y)\,dy = 0.$$

Разделив это уравнение на $P_2(y)Q_1(x) \neq 0$, тем самым сведем его к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx + \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,dy = C.$$

При таком преобразовании можно потерять решения $x = x_0$, где $Q_1(x_0) = 0$, и $y = y_0$, где $P_2(y_0) = 0$. Эти случаи нужно рассматривать отдельно. А именно: найти $x_k$ и $y_m$ такие, что $Q_1(x_k) = 0$, $P_2(y_m) = 0$, и проверить, являются ли $x = x_k$ и $y = y_m$ решениями исходного уравнения и содержатся ли они в общем интеграле при каком-либо значении $C_k$ и $C_m$ соответственно.

Пример 7.4. Решить уравнение $x(1 + y^2)\,dx + y(1 + x^2)\,dy = 0$.

Решение. Разделим данное уравнение на $(1 + x^2)(1 + y^2)$. Переменные разделяются:

$$\frac{2x\,dx}{1 + x^2} + \frac{2y\,dy}{y^2 + 1} = 0, \quad \ln(x^2 + 1) + \ln(y^2 + 1) = \ln C.$$

Значит, $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = C$ — общий интеграл данного уравнения.

Функции $Q_1(x) = 1 + x^2$ и $Q_2(y) = y^2 + 1$ при вещественных $x$ и $y$ в нуль не обращаются. Поэтому полученная формула содержит все решения рассматриваемого уравнения. □

## 7.2. Решение уравнений первого порядка

### 7.2.1. Однородные уравнения

**Определение 7.12.** Функция $P(x,y)$ называется *однородной степени* $m$, если для любого $t$ она удовлетворяет равенству

$$P(tx,ty) = t^m P(x,y).$$

Пример 7.5. Проверить на однородность следующие функции:

$$P_1(x,y) = 2x^2 + 3y^2, \qquad P_2(x,y) = \frac{x^3}{2y} - 3xy,$$

$$P_3(x,y) = \frac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}, \qquad P_4(x,y) = e^{xy}.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $P_1(x,y)$:

$$P_1(tx,ty) = 2(t^2x^2) + 3(t^2y^2) = t^2 P_1(x,y).$$

Аналогично

$$P_2(tx,ty) = t^2 P_2(x,y),$$

$$P_3(tx,ty) = \frac{txty + t^2y^2 e^{-\frac{tx}{ty}}}{t^2x^2} = P_3(x,y),$$

$$P_4(tx,ty) = e^{txty} = (e^{xy})^{t^2} = (P_4(x,y))^{t^2} \neq t^m P_4(x,y)$$

ни при каком $m$. Значит, $P_1(x,y), P_2(x,y)$ — однородные функции степени $m=2$; $P_3(x,y)$ — однородная функция степени $m=0$; $P_4(x,y)$ — неоднородная функция. □

**Определение 7.13.** Дифференциальное уравнение (7.7) называют *однородным*, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — однородные функции одной степени.

Отметим также, что однородное уравнение можно записать в виде

$$y' = f(x,y),$$

где $f(x,y)$ — однородная функция нулевой степени.



Однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $y = ux$, где $u$ — новая искомая функция. Действительно, положив $t = 1/x$ $(x \neq 0)$, будем иметь:

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^m} P(x,y), \quad Q\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^m} Q(x,y).$$

Получим уравнение

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + Q\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0,$$

или

$$P_1\left(\frac{y}{x}\right) dx + Q_1\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Учитывая $dy = u\,dx + x\,du$, имеем уравнение

$$P_1(u)\,dx + Q_1(u)(u\,dx + x\,du) = 0,$$

или

$$(P_1(u) + uQ_1(u))\,dx + xQ_1(u)\,du = 0,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Пример 7.6. Проинтегрировать уравнение $y' = \dfrac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$.

Р е ш е н и е. Несложно проверить, что данное уравнение является однородным. Положим $y = xu$. Тогда

$$u + xu' = u + u^2 e^{-\frac{1}{u}}.$$

Интегрируя, получаем:

$$-e^{\frac{1}{u}} = \ln|x| - C,$$

т.е. $e^{\frac{x}{y}} + \ln|x| = C$ — общий интеграл этого уравнения. □

*Замечание* 7.1. К однородным уравнениям сводятся также уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + a_2y + c_1}{b_1x + b_2y + c_2}\right) \tag{7.8}$$

при

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для сведéния уравнения (7.8) к однородному нужно решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y = -c_1, \\ b_1 x + b_2 y = -c_2. \end{cases}$$

Если ее решение $(x_0, y_0)$, то, выполнив преобразование $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, получим однородное уравнение

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 X + a_2 Y}{b_1 X + b_2 Y}\right).$$

### 7.2.2. Линейные уравнения

**Определение 7.14.** Уравнения, которые можно записать в виде

$$y' + p(x)y = q(x)$$

или

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y),$$

называются *линейными*, первое — относительно $y$, $\frac{dy}{dx}$, а второе — относительно $x$, $\frac{dx}{dy}$.

Если $q(x) \equiv 0$ $(q(y) \equiv 0)$, то уравнение называется *линейным однородным*, если $q(x) \neq 0$ $(q(y) \neq 0)$, — *линейным неоднородным*.

Линейное однородное уравнение — это уравнение с разделяющимися переменными.

Вначале рассмотрим решение линейного однородного уравнения

$$y' + p(x)y = 0. \tag{7.9}$$

Имеем:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + p(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} + \int p(x)\,dx = C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| + \int p(x)\,dx = \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)\,dx} = C\overline{y}, \tag{7.10}$$



где

$$\overline{y} = e^{-\int p(x)\,dx}; \quad C \neq 0.$$

Поскольку $y = 0$ — также решение уравнения (7.9), то формула (7.10) будет давать все решения (в данном случае — общее решение) уравнения (7.9), если считать параметр $C$ произвольным.

Для решения линейного неоднородного уравнения

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{7.11}$$

применим метод Лагранжа. Решение уравнения ищем в виде, подобном решению однородного уравнения

$$y = C(x)\overline{y}, \tag{7.12}$$

где $C(x)$ — неизвестная функция; $\overline{y} = \overline{y}(x)$ — решение однородного уравнения $y' + p(x)y = 0$. Подставляя (7.12) в (7.11), имеем:

$$C'(x)\overline{y} + \underbrace{C(x)\overline{y}' + C(x)p(x)\overline{y}}_{\substack{\Downarrow \\ C(x)[\overline{y}' + p(x)\overline{y}] = 0}} = q(x).$$

Значит,

$$C'(x)\overline{y} = q(x) \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = \frac{q(x)}{\overline{y}} \Rightarrow C(x) = \int \frac{q(x)}{\overline{y}}\,dx + C.$$

Подставляя найденную функцию $C(x)$ в (7.12), получаем:

$$y = C\overline{y} + \overline{y}\int \frac{q(x)}{\overline{y}}\,dx.$$

Последняя формула называется *формулой Бернулли*.

Пример 7.7. Решить уравнение $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\overline{y} = e^{-\int \cos x\,dx} = e^{-\sin x}, \; C'(x)e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \Rightarrow C'(x) = 1,$$

т.е. $C(x) = x + C$.

Общее решение:

$$y = (x + C)e^{-\sin x}.$$

□

Пример 7.8. Решить уравнение (7.6)

$$\frac{dP}{dt} + j(\beta+\delta)P = j(\alpha+\gamma).$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$P(t) = \left(P(0) - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)e^{-j(\beta+\delta)t} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \big(P(0) - \overline{P}\big)e^{-kt} + \overline{P},$$

где

$$k = j(\beta+\delta); \quad \overline{P} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}.$$

Геометрический смысл решения показан на рис. 7.4. □

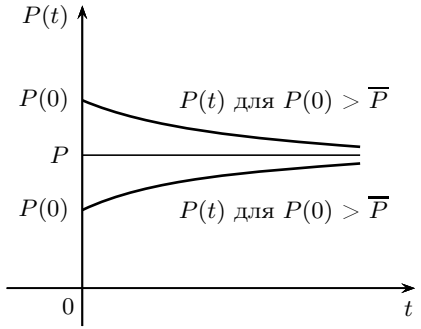


**Рис. 7.4**

Отметим, что линейные уравнения можно решить также методом Бернулли, представляя искомое решение в виде произведения двух дифференцируемых функций $y(x) = u(x)\,v(x)$. Этот прием будет продемонстрирован ниже при решении уравнения Бернулли.

### 7.2.3. Уравнение Бернулли

**Определение 7.15.** *Уравнением Бернулли* называют нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{7.13}$$

где $\alpha$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, — произвольное вещественное число.



Подстановка $y = u^{1-\alpha}$ приводит уравнение (7.13) к линейному неоднородному уравнению. Это уравнение можно решать также подстановкой $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда, записав его в виде

$$u'v + (v' + p(x)v)u = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha},$$

решим два уравнения с разделяющимися переменными:

1) $v' + p(x)v = 0$ (берем только одно решение $v \neq 0$);
2) $u' = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha-1}$ (берем его общее решение).

Подставляя их в соотношение $y(x) = u(x)v(x)$, получаем общее решение уравнения Бернулли.

Пример 7.9. Решить уравнение $xy' + y = y^2 \ln x$.

Р е ш е н и е. Это уравнение Бернулли. Полагаем $y = uv$. Тогда уравнение запишется так:

$$xuv' + v(xu' + u) = u^2v^2 \ln x.$$

Из $xu' + u = 0$ имеем $u = \dfrac{1}{x}$, а из

$$xv' = \frac{v^2 \ln x}{x}, \quad \frac{dv}{v^2} = \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

получим:

$$v = \frac{x}{1 + Cx + \ln x}.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = uv = \frac{1}{1 + Cx + \ln\, x}.$$ □

## 7.3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

### 7.3.1. Уравнения второго порядка. Общие понятия

**Определение 7.16.** Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

где $F$ — заданная функция четырех переменных $x$, $y$, $y'$, $y''$; $x$ — аргумент; $y = y(x)$ — искомая функция, называется *дифференциальным уравнением второго порядка.*

Будем рассматривать уравнения, которые можно записать в виде, разрешенном относительно второй производной

$$y'' = f(x, y', y''). \tag{7.14}$$

**Определение 7.17.** *Решением уравнения* (7.14) называется функция, определенная на некотором интервале $(a, b)$, непрерывная и имеющая непрерывные производные до второго порядка включительно, которая обращает это уравнение в тождество на $(a, b)$. График решения называется *интегральной кривой.*

Имеет место теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения второго порядка.

**Теорема 7.2 (Коши).** *Пусть функция $f(x, y', y'')$ и ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial y'}$ непрерывны в некоторой области $D$. Тогда для любой внутренней точки $M_0(x_0, y_0, y'_0)$ этой области существует единственное решение уравнения* (7.14)*, удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \tag{7.15}$$

*Геометрический смысл теоремы Коши* состоит в том, что через заданную точку $(x_0, y_0)$ на координатной плоскости $Oxy$ проходит единственная кривая с заданным угловым коэффициентом касательной.

**Определение 7.18.** *Задачей Коши* называют задачу отыскания решения уравнения (7.14) по заданным начальным условиям (7.15).

**Определение 7.19.** *Общим решением уравнения* (7.14) в некоторой области $D$ называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, если она является решением этого уравнения при любых постоянных величинах $C_1$ и $C_2$, которые могут быть определены единственным образом при заданных начальных условиях (7.15).

**Определение 7.20.** *Частным решением уравнения* (7.14) называют общее решение этого уравнения при фиксированных значениях постоянных.



### 7.3.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

**Определение 7.21.** Уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{7.16}$$

где $p$, $q$ — действительные числа; $f(x)$ — некоторая функция, называется *линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.*

**Определение 7.22.** Если $f(x) = 0$, то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{7.17}$$

называется *однородным.* Уравнение (7.16) — *неоднородное.*

Изучим сначала решение однородного уравнения.

**Теорема 7.3.** *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два частных решения однородного уравнения* (7.17)*, то их линейная комбинация*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{7.18}$$

*где $C_1$, $C_2$ — некоторые константы, также является частным решением этого уравнения.*

Доказательство. Подставляя функцию (7.18) в (7.17), получаем:

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = \\ &= C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Иными словами, формула (7.18) дает способ построения новых решений уравнения (7.17) из уже имеющихся. Возникает вопрос: как построить общее решение однородного уравнения?

**Определение 7.23.** Два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (7.17) называются *линейно независимыми* на интервале $(a, b)$, если

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv \text{const};$$

в противном случае эти решения называются *линейно зависимыми*.

Если хотя бы одно из решений ($y_1(x)$ или $y_2(x)$) тождественно равно нулю на рассматриваемом интервале, то эти решения будут линейно зависимыми.

**Теорема 7.4.** *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два линейно независимых частных решения уравнения* (7.17)*, то общее решение этого уравнения является их линейной комбинацией.*

### 7.3.3. Метод Эйлера решения однородного уравнения

Будем искать решения уравнения (7.17) в виде

$$y(x) = e^{\lambda x},$$

где $\lambda$ — некоторое число. Подставив эту функцию в уравнение (7.17), получим:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Поскольку $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{7.19}$$

**Определение 7.24.** Уравнение (7.19) называется *характеристическим* для дифференциального уравнения (7.17).

**Теорема 7.5.** *Если число $\lambda$ — действительный корень характеристического уравнения* (7.19)*, то функция $y = e^{\lambda x}$ является решением уравнения* (7.17)*.*

Вид решения уравнения (7.17) существенно зависит от того, какие корни имеет характеристическое уравнение.

Пусть характеристическое уравнение (7.19) уравнения (7.17) имеет действительные корни $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тогда общее решение уравнения (7.17) задается формулой

$$y_* = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{7.20}$$



Если характеристическое уравнение (7.19) имеет один корень $\lambda$ (кратности 2), то общее решение уравнения (7.17) задается формулой

$$y_* = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}. \tag{7.21}$$

Если характеристическое уравнение (7.19) не имеет действительных корней, то общее решение уравнения (7.17) задается формулой

$$y_* = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \tag{7.22}$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные константы; $\alpha = -\dfrac{p}{2}$; $\beta = \dfrac{\sqrt{-D}}{2}$.

*Замечание* 7.2. Задача нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения $n$-го порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

где $p_i$ — некоторые числа, может быть решена аналогично рассмотренному случаю.

Соответствующее характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

Если все корни этого характеристического уравнения действительные и простые, то общее решение запишется в виде

$$y_* = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Пусть все корни этого характеристического уравнения действительные, но не все простые (есть корни, имеющие кратность $m > 1$). Тогда каждому корню $\lambda$ кратности $m > 1$ соответствует $m$ частных решений:

$$e^{\lambda x},\ x e^{\lambda x},\ x^2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{m-1} e^{\lambda x}.$$

Поэтому если, например, характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1, \lambda_2$, причем корень $\lambda_1$ — простой, а $\lambda_2$ имеет кратность $m > 1$, то общее решение запишется в виде

$$y_* = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 x e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_{m+1} x^{m-1} e^{\lambda_2 x}.$$

### 7.3.4. Решение неоднородного уравнения. Метод вариации произвольных постоянных

Перейдем теперь к решению линейного неоднородного уравнения (7.16). Оно может быть решено методом вариации произвольных постоянных, который состоит в следующем.

Сначала находится общее решение

$$y_* = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

соответствующего однородного уравнения, затем решение исходного неоднородного уравнения ищется в виде

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x), \tag{7.23}$$

т.е. предполагается, что постоянные $C_1$ и $C_2$ являются неизвестными функциями независимой переменной $x$ (говорят, что переменные варьируются, изменяются).

Найдем производную:

$$y' = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Подберем функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0.$$

Тогда

$$y' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x),$$
$$y'' = C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x).$$

Подставляя выражения для $y, y', y''$ в исходное уравнение (7.16), получаем:

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x) + \\ + p\big(C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)\big) + q\big(C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)\big) = f(x)$$

или

$$C_1(x)\big(y_1''(x) + p y_1'(x) + q y_1(x)\big) + C_2(x)\big(y_2''(x) + p y_2'(x) + q y_2(x)\big) + \\ + C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x).$$



Поскольку $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения однородного уравнения, то выражения в скобках равны нулю, а потому

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x).$$

Окончательно заключаем, что функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ найдутся как решение системы

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2' y_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

из которой они определяются однозначно. Проинтегрировав полученные функции, найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$, а затем по формуле (7.23) найдем и решение неоднородного уравнения (7.16).

**Теорема 7.6 (о структуре общего решения неоднородного уравнения).** *Общее решение неоднородного уравнения* (7.16) *есть сумма любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.*

Исходя из приведенной теоремы, остается рассмотреть вопрос о нахождении частного решения, так как общее решение однородного уравнения мы находить умеем.

### 7.3.5. Метод нахождения частного решения неоднородного уравнения со специальной правой частью

Решение неоднородных уравнений методом вариации произвольных постоянных часто приводит к необходимости вычисления достаточно сложных интегралов. Поэтому в некоторых случаях удобно отыскивать частное решение неоднородного уравнения другим способом, не прибегая к нахождению интегралов. Перечислим эти случаи.

1. Пусть правая часть имеет вид

$$f(x) = P_n(x),$$

где $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен степени $n$. Тогда частное решение можно искать в виде

$$\varphi(x) = \overline{P}_n(x) x^r,$$

где $\overline{P}_n(x)$ — многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами; $r$ — число корней характеристического уравнения, равных нулю.

2. Пусть правая часть уравнения (7.16) имеет вид

$$f(x) = P_n(x)e^{\gamma x},$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени $n$. Тогда частное решение следует искать в виде

$$\varphi(x) = \overline{P}_n(x)e^{\gamma x}x^r,$$

где $\overline{P}_n(x)$ — многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами; $r$ — число корней характеристического уравнения, равных $\gamma$.

3. Пусть правая часть уравнения (7.16) имеет вид

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + Q_m(x)e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены степени $n$ и $m$ соответственно.

Обозначим $l = \max\{m, n\}$. Положим $r = 1$, если дискриминант характеристического уравнения отрицателен и при этом одновременно выполняются равенства $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$ (см. формулу (7.22)). В противном случае $r = 0$. Тогда частное решение следует искать в виде

$$\varphi(x) = x^r e^{\alpha_1 x}\big(\overline{P}_l(x)\cos\beta_1 x + \overline{Q}_l(x)\sin\beta_1 x\big),$$

где $\overline{P}_l(x)$, $\overline{Q}_l(x)$ — многочлены степени $l$ с неопределенными коэффициентами.

**Теорема 7.7 (принцип суперпозиции решений).** *Если $\varphi_1(x)$ — частное решение уравнения*

$$y'' + py' + qy = f_1(x),$$

*а $\varphi_2(x)$ — частное решение уравнения*

$$y'' + py' + qy = f_2(x),$$

*то сумма $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ является частным решением уравнения*

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$



Пример 7.10. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y' = 2x + 6e^{2x}.$$

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Найдем его корни: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_* = C_1 + C_2e^x.$$

Рассмотрим уравнение

$$y'' - y' = 2x. \tag{7.24}$$

Его частное решение ищем в виде (первый из рассмотренных случаев специальной правой части)

$$\varphi_1(x) = Ax^2 + Bx.$$

Для нахождения $A$ и $B$ найдем производные:

$$\varphi_1'(x) = 2Ax + B, \quad \varphi_1''(x) = 2A$$

и подставим в уравнение (7.24):

$$2A - 2Ax - B = 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получаем: $A = -1$, $B = -2$. Значит,

$$\varphi_1(x) = -x^2 - 2x.$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$y'' - y' = 6e^{2x}.$$

Его частное решение ищем в виде (второй из рассмотренных случаев специальной правой части) $\varphi_2(x) = Ae^{2x}$. Поступая аналогичным образом, находим: $A = 3$, т.е.

$$\varphi_2(x) = 3e^{2x}.$$

На основании теоремы 7.6 и принципа суперпозиции заключаем, что общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = y_* + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = C_1 + C_2e^x - x^2 - 2x + 3e^{2x}. \qquad \square$$

### 7.3.6. Приложение уравнений второго порядка в экономике

Теория дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами находит приложение и в построении экономических моделей.

Рассмотрим модель рынка с прогнозируемыми ценами. В простых моделях обычно полагают, что спрос и предложение зависят только от текущей цены товара. Но они зависят также и от тенденции ценообразования, и от темпов изменения цены. В моделях эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными функции цены $P(t)$.

Пусть функции спроса $D$ и предложения $S$ имеют следующие зависимости от цены $P$ и ее производных:

$$D(t) = 3P'' - P' - 2P + 18,$$
$$S(t) = 4P'' + P' + 3P + 3.$$

Спрос «подогревается» темпом изменения цены (если темп роста цены растет, т.е. $P'' > 0$, то рынок увеличивает интерес к товару, и наоборот), а быстрый рост цены отпугивает покупателей. Поэтому слагаемое с первой производной цены входит в функцию $D(t)$ со знаком «$-$».

Предложение еще в большей мере усиливается темпом изменения цены, поэтому коэффициент при $P''$ в функции $S(t)$ больше, чем в $D(t)$. Рост цены также увеличивает предложение, поэтому слагаемое, содержащее $P'$, входит в $S(t)$ со знаком «$+$».

Требуется установить зависимость цены от времени. Поскольку рыночное равновесие определяется равенством $D = S$, получим:

$$P'' + 2P' + 5P = 15.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $P(t)$. Его общее решение дается формулой

$$P(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 3.$$

Отметим, что частное решение $P(t) = 3$ исследуемого уравнения можно рассматривать как установившуюся цену. При $t \to \infty$ $P(t) \to 3$, т.е. все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $P = 3$ и колеблются около нее.

# Глава 8

# Ряды

## 8.1. Числовые ряды

### 8.1.1. Понятие числового ряда

Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность, $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

**Определение 8.1.** Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{8.1}$$

называется *числовым рядом*. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами ряда*, а $a_n$ — *n-м* или *общим членом ряда* (8.1).

**Определение 8.2.** Сумма первых $n$ членов ряда (8.1) называется *n-й частичной суммой ряда* и обозначается $S_n$:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Будем иметь:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \ldots .$$

Получим последовательность частичных сумм ряда (8.1)

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots .$$

**Определение 8.3.** Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имеет конечный предел $S$, то числовой ряд (8.1) называется *сходящимся*, а число $S$ — *суммой ряда*:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

т.е.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если же предел последовательности $\{S_n\}$ не существует или бесконечен, то ряд (8.1) называется *расходящимся*.

Пример 8.1. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Р е ш е н и е. Составим $n$-ю частичную сумму:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}.$$

Легко найти, что

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \lim_{n\to\infty} (1 - q^n).$$

Если $|q| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} (1 - q^n) = 1,$$

а сумма

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - q},$$

т.е.

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1.$$

Мы получили известную формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Если $|q| > 1$ или $q = 1$, то очевидно, что последовательность $\{S_n\}$ является ББП, если же $q = -1$, то предел $\{S_n\}$ не существует. □



**Определение 8.4.** Выражение вида

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots = \sum_{k=i+1}^{\infty} a_k \tag{8.2}$$

также представляет собой ряд, и он называется *$i$-м остатком ряда* (8.1). Обозначается $r_i$.

**Теорема 8.1.** *Числовой ряд и любой его остаток сходятся или расходятся одновременно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению $n$-я частичная сумма ряда (8.1)

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

а $m$-я частичная сумма ряда (8.2)

$$\sigma_m = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i+m}.$$

Следовательно, $\sigma_m = S_{i+m} - S_i$.

Так как $i$ фиксировано, то предел $\{\sigma_m\}$ существует тогда и только тогда, когда существует

$$\lim_{m\to\infty} S_{i+m},$$

т.е. имеет предел последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$. □

Из теоремы 8.1 следует, что сходимость ряда не нарушается, если изменить конечное число его членов.

Заметим также, что если ряд (8.1) сходится, то

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \text{ или } S = S_n + r_n, \tag{8.3}$$

где $S_n$ — частичная сумма ряда (8.1); $r_n$ — его $n$-й остаток.

**Теорема 8.2.** *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n, \quad C = \text{const},$$

*причем* $CS = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Ca_n$. *Если же сходятся ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

*и их суммы равны соответственно* $S$ *и* $\sigma$, *то сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n).$$

*Его сумма равна* $S \pm \sigma$.

Доказательство. Докажем, например, второе утверждение. Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k =$$
$$= \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S + \sigma. \qquad \square$$

Подчеркнем, что утверждение, обратное только что доказанному, вообще говоря, неверно. Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - 1)$$

сходится, а ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)$ расходятся.

### 8.1.2. Необходимое условие сходимости числового ряда

Исследование сходимости ряда является важнейшей задачей теории числовых рядов.



**Теорема 8.3 (необходимое условие сходимости).** *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{8.4}$$

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Очевидно, что $S_n - S_{n-1} = a_n$ и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \square$$

Итак, если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что если

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

или не существует, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

расходится. Однако подчеркнем, что условие (8.4) не является достаточным, т.е. если оно выполняется, то это не означает, что ряд сходится.

Пример 8.2. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \tag{8.5}$$

называемый *гармоническим.*

Р е ш е н и е. Очевидно, что необходимое условие сходимости числовых рядов выполняется:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Однако этот ряд расходится. Действительно, предположим противное. Пусть ряд (8.5) сходится и

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0. \tag{8.6}$$

В то же время,

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geqslant n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

что противоречит условию (8.6). Таким образом, гармонический ряд расходится. □

Пример 8.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$.

Р е ш е н и е. Проверим выполнение необходимого условия:

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\neq 0,$$

т.е. данный ряд расходится. □

### 8.1.3. Достаточные условия сходимости

Вначале достаточные условия сходимости будем искать для рядов с неотрицательными членами, т.е. будем рассматривать ряды:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n,\quad a_n\geqslant 0,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{8.7}$$



**Теорема 8.4.** *Для того чтобы ряд* (8.7) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем достаточность. Пусть последовательность $\{S_n\}$ ограничена. Заметим, что $S_{n+1}=S_n+a_n\geqslant S_n$, $n\in\mathbb{N}$, так как $a_n\geqslant 0$, т.е. $\{S_n\}$ — возрастающая и ограниченная. Тогда по теореме 3.5 она имеет предел. □

**Теорема 8.5 (признак сравнения).** *Пусть даны два ряда с неотрицательными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ (A),\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n\ (B)$$

*и пусть* $a_n\leqslant b_n\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}$. *Тогда из сходимости ряда (B) следует сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) — расходимость ряда (B).*

Образно говоря, признак сравнения свидетельствует о том, что если сходится некоторый ряд с неотрицательными членами, то ряд с меньшими неотрицательными членами также сходится. Наоборот, если ряд с неотрицательными членами расходится, то ряд с бóльшими неотрицательными членами также расходится.

Пример 8.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $0<p\leqslant 1$.

Р е ш е н и е. Применим признак сравнения, воспользовавшись тем, что гармонический ряд (см. пример 8.2) расходится. Очевидно, что

$$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}\quad\forall\, n\in\mathbb{N},\ 0<p\leqslant 1,$$

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится. Поэтому расходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\quad 0<p\leqslant 1.$$

□

Можно показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

при $p > 1$ сходится. Это объясняется тем, что при $p > 1$ общий член $a_n = 1/n^p$ стремится к нулю достаточно быстро.

**Теорема 8.6 (признак Д'Аламбера).** *Пусть дан ряд с неотрицательными числами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

*Тогда если $q < 1$, то ряд сходится, если $q > 1$, то ряд расходится. Если $q = 1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться.*

Доказательство. Пусть $q < 1$. Выберем такое число $\varepsilon > 0$, чтобы $q + \varepsilon < 1$. Тогда по определению предела последовательности

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_0 \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon,$$

или

$$q - \varepsilon < \frac{a_n + 1}{a_n} < q + \varepsilon.$$

Таким образом, $\forall\, n > N_0 \;\; a_{n+1} < (q+\varepsilon)a_n$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} &a_{N_0+2} < (q+\varepsilon)a_{N_0+1}, \\ &a_{N_0+3} < (q+\varepsilon)a_{N_0+2} < (q+\varepsilon)^2 a_{N_0+1}, \\ &a_{N_0+4} < (q+\varepsilon)a_{N_0+3} < (q+\varepsilon)^3 a_{N_0+1}, \dots . \end{aligned}$$

Ряд

$$(q+\varepsilon)a_{N_0+1} + (q+\varepsilon)^2 a_{N_0+1} + (q+\varepsilon)^3 a_{N_0+1} + \dots$$



сходится, так как $q + \varepsilon \in (0, 1)$. Следовательно, по признаку сравнения сходится и ряд

$$\sum_{n=N_0+2}^{\infty} a_n,$$

а с ним — и ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

(применим теорему 8.1).

Случай $q > 1$ рассматривается аналогично. Если же $q = 1$, то можно привести примеры и сходящихся, и расходящихся рядов. □

Приведем без доказательства еще один признак.

**Теорема 8.7 (признак Коши).** *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*с неотрицательными членами и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

*Тогда если $q < 1$, то ряд сходится, если $q > 1$, то ряд расходится. Если $q = 1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться.*

В некоторых случаях удобно пользоваться следующим признаком.

**Теорема 8.8 (интегральный признак).** *Пусть функция $f$ убывает и неотрицательна на $[1, +\infty)$. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

*и несобственный интеграл*

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

*сходятся или расходятся одновременно.*

Пример 8.5. Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$.

Р е ш е н и е. а) Применим признак Д'Аламбера. Имеем:

$$a_n=\frac{2^n}{n!},\quad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1.$$

Ряд сходится.

б) К данному ряду удобно применить признак Коши:

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=2>1.$$

Ряд расходится. □

Приведенные выше достаточные условия сходимости относятся к рядам с неотрицательными членами. Теперь рассмотрим еще один тип рядов — знакочередующиеся ряды.

**Определение 8.5.** *Знакочередующимся рядом* называется ряд вида

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,\qquad(8.8)$$

где $a_n>0$, $n\in\mathbb{N}$.

**Теорема 8.9 (признак Лейбница).** *Если члены ряда* (8.8) *удовлетворяют условиям:*

1) $a_n\geqslant a_{n+1}\quad\forall\, n\in\mathbb{N}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,

*то ряд* (8.8) *сходится и его сумма $S$ не превосходит $a_1$, т.е. $S\leqslant a_1$.*



Пример 8.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Р е ш е н и е. Данный ряд знакочередующийся. Он удовлетворяет условиям признака Лейбница, так как

$$a_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=a_{n+1},\ n\in\mathbb{N},\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Значит, рассматриваемый ряд сходится. □

### 8.1.4. Абсолютная и условная сходимость

Рассмотрим теперь числовые ряды с членами произвольных знаков. Такие ряды называются *знакопеременными.*

**Определение 8.6.** Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

**Теорема 8.10.** *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

*сходится, то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

**Определение 8.7.** Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

расходится.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ является условно сходящимся.

Исследование знакопеременных рядов на абсолютную сходимость можно провести с помощью признаков Д'Аламбера, Коши и признаков сравнения, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

является рядом с неотрицательными членами.

### 8.1.5. Приложения рядов в экономике

В экономике ряды и их суммы появляются в основном в теоретических исследованиях. Предположим, что рассматривается вопрос о рыночной цене бессрочной облигации номиналом 1000 ден. ед. и трехпроцентным купоном. Это значит, что владелец облигации будет каждый год получать 30 ден. ед. Но как определить истинную цену всей бесконечной последовательности платежей? Как правило, любая валюта подвержена инфляции. Если инфляция составляет 2% в год, то 30 ден. ед., которые получит владелец через год, сейчас эквивалентны $30/(1+0{,}02)$ ден. ед., а те же 30 ден. ед., которые он планирует получить через 2 года, сейчас эквиваленты $30/(1+0{,}02)^2$ ден. ед. и т.д.

Выходит, что бесконечный ряд платежей в 30 ден. ед. в год, которые владелец облигации будет получать каждый год в будущем, сейчас эквивалентны сумме ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{30}{(1+0{,}02)^n},$$

т.е. сумме бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Воспользовавшись формулой суммы, найдем, что все выплаты составят 1530 ден. ед.

Такого рода дисконтирование, т.е. нахождение сегодняшних эквивалентов будущих платежей, применяется и в других ситуациях.

Пусть, например, рассматриваются две стратегии действий фирмы в будущем. Для выяснения того, какая из них лучше, приходится дисконтировать к сегодняшнему моменту прибыли по каждой из



стратегий. Сегодняшний эквивалент этих дисконтированных прибылей представляет собой сумму бесконечного ряда. Какая из этих сумм больше, ту стратегию, возможно, и стоит выбрать.

## 8.2. Функциональные ряды

### 8.2.1. Основные определения. Область сходимости

**Определение 8.8.** Ряд вида

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{8.9}$$

где $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, — некоторые функции аргумента $x$, заданные на множестве $X$, называется *функциональным рядом*, заданным на множестве $X$.

Если фиксировать какое-либо $x = x_0 \in X$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \tag{8.10}$$

является числовым рядом.

**Определение 8.9.** Если числовой ряд (8.10) сходится, то говорят, что функциональный ряд (8.9) *сходится в точке* $x = x_0$. В противном случае функциональный ряд (8.9) *расходится в точке* $x = x_0$.

**Определение 8.10.** Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости*.

Область сходимости может совпадать с множеством $X$, но может и не совпадать, в частности может быть пустым множеством.

Пусть $D$ — область сходимости ряда (8.9). Тогда для каждого фиксированного $x \in D$ соответствующий числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

сходится и имеет сумму. Если каждому $x \in D$ поставить в соответствие число, равное этой сумме, то на множестве $D$ будет определена некоторая функция $S = S(x)$, называемая *суммой функционального ряда* (8.9). Тогда записывают:

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots, \quad x \in D.$$

Пример 8.7. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Р е ш е н и е. В данном случае $f_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Эти функции определены на $\mathbb{R}$. Из примера 8.1 следует, что функциональный ряд сходится в любой точке $x \in \mathbb{R}$, для которой $|x| < 1$. Если же $|x| \geqslant 1$, то соответствующий числовой ряд расходится. Таким образом, областью сходимости данного ряда является интервал $(-1, 1)$.

Очевидно, что суммой этого функционального ряда является функция

$$S(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1),$$

т.е.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1). \qquad \square$$

**Определение 8.11.** Функциональный ряд (8.9) называется *абсолютно сходящимся* на множестве $D_1$, если в каждой точке $x \in D_1$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Так как абсолютно сходящийся ряд сходится, то $D_1 \subset D$.

Образуем $n$-ю частичную сумму ряда (8.9):

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \ x \in D.$$

Очевидно, что если фиксировать $x = x_0$, $x_0 \in D$, то $\{S_n(x_0)\}$ есть числовая последовательность. Если существует конечный

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0),$$



то он равен $S(x_0)$. По определению предела это означает, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_0 \quad |S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon.$$

Подчеркнем, что здесь номер $N_0$ зависит, вообще говоря, и от $\varepsilon$, и от точки $x_0$. Особый интерес представляет случай, когда можно указать номер $N_0$ такой, что он зависит только от $\varepsilon$ и не зависит от выбора точки $x_0$.

**Определение 8.12.** Говорят, что функциональный ряд (8.8) *равномерно сходится на множестве* $D$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad \forall\, x \in D \quad |S_n - S| < \varepsilon.$$

Весьма удобным для исследования ряда на равномерную сходимость является следующий признак Вейерштрасса.

**Теорема 8.11 (признак Вейерштрасса).** *Если члены ряда удовлетворяют неравенствам*

$$|f_n(x)| \leqslant a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, x \in D,$$

*и числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*сходится, то ряд* (8.9) *равномерно сходится в* $D$.

Пример 8.8. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}.$$

Р е ш е н и е. Очевидно, что

$$\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

сходится. Значит, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$. $\square$

Если предположить, что члены ряда (8.9) являются функциями, непрерывными в его области сходимости $D$, то возникает вопрос: будет ли непрерывной его сумма $S(x)$ в $D$? Ответ дает следующая теорема.

**Теорема 8.12.** *Если члены функционального ряда являются непрерывными в области $D$ функциями и ряд* (8.9) *равномерно сходится в $D$, то его сумма является функцией, непрерывной в $D$.*

Например, сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

является функцией, непрерывной на $\mathbb{R}$.

### 8.2.2. Степенные ряды

**Определение 8.13.** Функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \quad (8.11)$$

где $c_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$; $a \in \mathbb{R}$, называется *степенным рядом*. Числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$ называются *коэффициентами степенного ряда* (8.11).

Если $a = 0$, то ряд (8.11) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (8.12)$$

Именно такие степенные ряды будем изучать.

Если в выражении (8.11) положить $x - a = y$, то придем к ряду вида (8.12).

Степенной ряд (8.12) всегда сходится в точке $x = 0$. Если $x \neq 0$, то ряд (8.12) может сходиться, а может и расходиться.

Важную роль в теории степенных рядов играет следующая теорема.

**Теорема 8.13 (Абеля).** *Если степенной ряд* (8.12) *сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в любой точке $x$, $|x| < |x_0|$.*



Доказательство. По условию теоремы числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$$

сходится. Согласно необходимому условию

$$\lim_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0,$$

поэтому последовательность $\{c_n x_0^n\}$ является ограниченной, т.е.

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, n, n = 0, 1, \ldots, \quad |c_n x_0^n| \leqslant Mq^n.$$

Пусть $x$ такое, что $|x| < |x_0|$. Тогда

$$|c_n x_0^n| \leqslant |c_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant Mq^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $q = \left|x/x_0\right| < 1$. Но ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$$

при таких $q$ сходится. Тогда по признаку сравнения сходится и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|. \qquad \square$$

**Следствие 8.1.** *Если в точке $x_1 \neq 0$ степенной ряд* (8.12) *расходится, то он расходится во всех точках $x$ таких, что $|x| > |x_1|$.*

Доказательство. Действительно, если бы ряд (8.12) сходился в точке $x$, $|x| > |x_1|$, то по теореме Абеля он сходился бы в точке $x_1$, что противоречит условию. $\square$

Теорема Абеля и ее следствие дают ясное представление об области сходимости степенного ряда. Пусть $x_0$ — точка сходимости степенного ряда. Тогда интервал $(-|x_0|, |x_0|)$ состоит из точек сходимости (рис. 8.1).

Если степенной ряд расходится в точке $x_0$, то он расходится и во всех точках интервалов $(-\infty, -|x_0|)$ и $(|x_0|, +\infty)$ (рис. 8.2).

**Рис. 8.1**

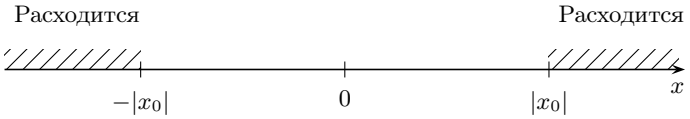


**Рис. 8.2**

Естественно возникает вопрос: можно ли подобрать некоторое число $R$ таким образом, чтобы степенной ряд сходился на интервале $(-R, R)$ и расходился на интервалах $(-\infty, -R)$ и $(R, +\infty)$?

**Определение 8.14.** Число $R$ такое, что при всех $x$, $|x| < R$, ряд (8.12) сходится, а при всех $x$, $|x| > R$, расходится (рис. 8.3), называется *радиусом сходимости ряда* (8.12).

**Рис. 8.3**

**Определение 8.15.** Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости ряда* (8.12).

Если ряд (8.12) сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0$; если ряд сходится для всех $x \in \mathbb{R}$, то $R = \infty$.

Подчеркнем, что в каждой точке $x \in (-R, R)$ ряд (8.12) будет сходиться абсолютно, в точках $x = \pm R$ он может сходиться, а может и расходиться.

**Теорема 8.14.** *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = l,$$

*то радиус сходимости $R$ ряда* (8.11) *равен* $1/l$.



Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|.$$

Применим к нему признак Д'Аламбера. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |x| = l|x|.$$

Отсюда следует, что если $l|x| < 1$, $|x| < 1/l$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|c_n x^n\right|$$

сходится, а ряд (8.12) сходится абсолютно.

Если $l|x| > 1$, то ряд (8.12) расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = l|x| > 1.$$

Следовательно, общий член ряда $c_n x^n$ не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Отметим, что если $l = 0$, то $R = \infty$; если же $l = \infty$, то $R = 0$. □

**Теорема 8.15.** *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l,$$

*то радиус сходимости ряда* (8.11) *равен* $1/l$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 8.14.

Пример 8.9. Найти радиус сходимости и интервал сходимости следующих степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$.

Р е ш е н и е. а) Для отыскания радиуса сходимости в данном случае применим формулу из теоремы 8.15:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = \lim_{n\to\infty} = 2, \quad R = \frac{1}{2}.$$

Данный степенной ряд сходится абсолютно на интервале $(-1/2, 1/2)$.

б) Воспользуемся формулой из теоремы 8.14:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty, \quad R = 0,$$

т.е. данный степенной ряд сходится только в точке $x = 0$.

в) Поступаем аналогично, как в примере б):

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \quad R = \infty,$$

т.е. ряд сходится на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$.

г) Этот ряд имеет вид (8.11). Найдем радиус сходимости по формуле из теоремы 8.15:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}} = e^{-1}.$$

Интервал сходимости определяется из условия $|x - 1| < e^{-1}$. Получаем $(1 - e^{-1}, 1 + e^{-1})$. □

Пример 8.10. Найти интервал сходимости следующих степенных рядов и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$.

Р е ш е н и е. а) Имеем:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3(n+1)} = \frac{1}{3}, \quad R = 3.$$



Значит, интервал сходимости есть $(-3, 3)$. Исследуем поведение ряда в граничных точках. Пусть $x = 3$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Это гармонический ряд, и он расходится.

Пусть теперь $x = -3$. Имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Это знакочередующийся ряд; по признаку Лейбница он сходится. Таким образом, данный степенной ряд сходится на промежутке $[-3, 3)$.

б) Имеем:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1.$$

Тогда интервал сходимости $(-1, 1)$.

Если $x = \pm 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}(\pm 1)^n \neq 0.$$

Согласно необходимому условию данный ряд в точках $x = \pm 1$ расходится. □

Рассмотрим степенной ряд (8.12), интервал сходимости которого $(-R, R)$. На этом интервале ряд имеет сумму. Обозначим ее $f$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x), \quad x \in (-R, R). \tag{8.13}$$

**Свойства степенных рядов**

**1.** *Сумма $f$ степенного ряда является функцией, непрерывной на интервале сходимости $(-R, R)$.*

**2.** *Сумма $f$ степенного ряда является функцией, дифференцируемой на $(-R, R)$, причем ее производную можно найти по формуле*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R). \tag{8.14}$$

*В этом случае говорят, что степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости.*

Данное утверждение можно применять снова уже к степенному ряду (8.14). Это означает, что сумма степенного ряда является функцией, бесконечно дифференцируемой на $(-R, R)$.

**3.** *Для любого отрезка $[a, b] \subset (-R, R)$ справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b c_n x^n\,dx, \tag{8.15}$$

*т.е. интеграл от суммы степенного ряда по любому отрезку $[a, b] \subset (-R, R)$ может быть вычислен почленным интегрированием ряда* (8.13).

**4.** *Степенные ряды*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

*имеющие радиусы сходимости соответственно $R_1$ и $R_2$, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел $R_1$ и $R_2$.*

Все вышесказанное справедливо для рядов вида (8.11) на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, где $R$ — радиус сходимости ряда (8.11).

### 8.2.3. Разложение функций в степенные ряды

Если функция $f$ является суммой ряда

$$c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n, \tag{8.16}$$



т.е.

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n + \ldots, \tag{8.17}$$

где $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, то говорят, что функция $f$ разлагается в степенной ряд по степеням $(x - x_0)$.

Разложение функции в степенные ряды является одной из важнейших задач, так как функцию можно приближенно заменить суммой нескольких первых членов ряда, т.е. многочленом.

**Теорема 8.16.** *Если функция $f(x)$ разлагается на интервале сходимости в сходящийся степенной ряд, то это разложение единственно.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд, т.е. справедлива формула (8.17). Тогда по свойству степенных рядов этот ряд можно почленно дифференцировать сколько угодно много раз на интервале сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + \ldots + nc_n(x-x_0)^{n-1} + \ldots,\\
f''(x) &= 2c_2 + 6c_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2} + \ldots,\\
f'''(x) &= 6c_3 + 24c_4(x-x_0) + \ldots + n(n-1)(n-2)c_n(x-x_0)^{n-3} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2c_n.
\end{aligned}$$

Полагая в этих равенствах и в формуле (8.17) $x = x_0$, находим:

$$f(x_0) = c_0, \quad f'(x_0) = c_1, \quad f''(x_0) = 2c_2,$$
$$f'''(x_0) = 6c_3, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x_0) = n!\,c_n.$$

Тогда

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad \ldots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставив найденные значения коэффициентов в ряд (8.17), получим:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots. \tag{8.18}$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что разложение в ряд (8.18) единственно, т.е. если имеются два разложения по степеням $x = x_0$ одной и той же функции $f$, то эти разложения имеют равные коэффициенты при одинаковых степенях $x = x_0$. □

**Определение 8.16.** Ряд (8.18) называется *рядом Тейлора* функции $f$ в окрестности точки $x = x_0$.

**Определение 8.17.** Если $x_0 = 0$, то ряд (8.18) называется *рядом Маклорена* и имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots. \qquad (8.19)$$

Для дальнейших рассуждений напомним, что частичная сумма ряда (8.18)

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x - x_0)^k$$

называется *многочленом Тейлора*, разность

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

называется *остаточным членом ряда Тейлора*, а запись

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad c \in (x_0, x), \qquad (8.20)$$

называется *остаточным членом в форме Лагранжа.*

Если просто предположить, что функция $f$ имеет в окрестности точки $x = x_0$ производные любого порядка, т.е. бесконечно дифференцируема в окрестности точки $x = x_0$, и формально составить для нее ряд Тейлора, то из этого не следует, что данный ряд сходится при $x \neq x_0$. Если же полученный ряд сходится, то необязательно к функции $f(x)$.

**Теорема 8.17 (критерий сходимости ряда Тейлора).** *Для того чтобы ряд Тейлора, составленный для бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, сходился на интервале сходимости и имел своей суммой $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю на указанном интервале.*



На практике пользуются следующим утверждением.

**Теорема 8.18 (достаточное условие сходимости ряда Тейлора).** *Если функция $f$ является бесконечно дифференцируемой на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ и все ее производные ограничены одной и той же постоянной $M$ на $(x_0 - R, x_0 + R)$, то ряд Тейлора* (8.18) *сходится к функции $f$ на этом интервале.*

Доказательство. По условию теоремы

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M.$$

Рассмотрим остаточный член в форме Лагранжа (8.20). Тогда

$$|R(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \leqslant \frac{M\,|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Согласно критерию сходимости это и означает сходимость ряда Тейлора к функции $f(x)$. □

### 8.2.4. Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

В п. 4.3.2 были приведены разложения основных элементарных функций. Рассмотрим вывод этих формул.

**1.** $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Так как

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то, подставив найденные значения в формулу (8.19), получим требуемое разложение.

Докажем, что полученный ряд сходится и имеет своей суммой функцию $e^x$. Сначала найдем область сходимости. Для нахождения радиуса сходимости воспользуемся теоремой 8.14:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Значит, ряд сходится на всей числовой прямой. Кроме того, применив теорему 8.18, можно утверждать, что полученный ряд сходится к функции $e^x$, так как на любом отрезке $[-a, a]$ функция $e^x$ и все ее производные ограничены одним и тем же числом, например $e^a$. □

**2.** $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Найдем $n$-ю производную этой функции. Имеем:

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\\
&f''(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\\
&f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Осталось найти значение функции и ее производных в нуле:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1,$$

заметить, что

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

и подставить найденные значения в формулу (8.19).

Теперь найдем область сходимости полученного степенного ряда. Так как

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

то по достаточному условию сходимости получим, что ряд сходится к функции $\sin x$ на всей числовой прямой. □

Аналогичным образом можно получить разложения и некоторых других элементарных функций.

# Рекомендуемая литература


[1] *Баврин, И.И.* Высшая математика / И.И. Баврин, В.И. Матросов. М., 2002.

[2] *Булдык, Г.М.* Высшая математика: курс лекций / Г.М. Булдык. Минск, 2010.

[3] Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер [и др.]. 3-е изд. М., 2008.

[4] Высшая математика. Общий курс / А.И. Яблонский [и др.]; под общ. ред. С.А. Самаля. 2-е изд. Минск, 2000.

[5] *Гусак, А.А.* Высшая математика. В 2 т. / А.А. Гусак. Минск, 2004.

[6] *Гусак, А.А.* Задачи и упражнения по высшей математике / А.А. Гусак. Минск, 1990.

[7] *Гусак, А.А.* Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. Минск, 2004.

[8] *Данко, П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. М., 2002.

[9] *Дураков, Б.К.* Краткий курс высшей алгебры / Б.К. Дураков. М., 2006.

[10] *Жевняк, Р.М.* Высшая математика / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. Минск, 1992.

[11] *Карасев, А.И.* Курс высшей математики для экономических вузов / А.И. Карасев, З.М. Аксютин, Т.Н. Савельев. Минск, 1982.

[12] *Комалев, В.А.* Математическая экономика / В.А. Комалев. Минск, 1998.

[13] *Красс, М.С.* Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. М., 2005.

[14] *Кузнецов, А.В.* Высшая математика. Общий курс / А.В. Кузнецов, Л.Ф. Янчук. Минск, 1993.

[15] *Курош, А.Г.* Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. М., 1968.

[16] Курс вышэйшай матэматыкі. Алгебра і геаметрыя. Аналіз функцый адной зменнай / В.М. Русак [і інш.]. Мінск, 1994.

[17] Курс вышэйшай матэматыкі. Функцыі некалькіх зменных. Интэгральнае злічэнне. Шэрагі / В.М. Русак [і інш.]. Мінск, 1997.

[18] *Малыхин, В.И.* Математика в экономике / В.И. Малыхин. М., 2001.

[19] *Минорский, В.П.* Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. М., 2001.

[20] *Минюк, С.А.* Высшая математика / С.А. Минюк, Е.А. Ровба. 3-е изд. Гродно, 2004.

[21] *Минюк, С.А.* Высшая математика для экономистов. В 2 т. / С.А. Минюк, С.А. Самаль, Л.И. Шевченко. Минск, 2003.

[22] *Минюк, С.А.* Математические методы и модели в экономике / С.А. Минюк, Е.А. Ровба, К.К. Кузьмич. Минск, 2002.

[23] *Письменный, Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. / Д.Т. Письменный. М., 2004.

[24] *Размыслович, Г.П.* Сборник задач по геометрии и алгебре / Г.П. Размыслович, М.М. Феденя, В.М. Ширяев. Минск, 1999.

[25] Сборник задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / К.Н. Лунгу [и др.]. 3-е изд. М., 2004.

[26] Сборник задач по высшей математике для экономистов / под ред. В.И. Ермакова. М., 2002.

[27] *Солодовников, А.С.* Математика в экономике. В 2 ч. Ч. 2 / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов. М., 2000.

[28] *Сухая, Т.А.* Сборник задач по высшей математике. В 2 ч. / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. Минск, 1993.

[29] *Шипачев, В.С.* Высшая математика / В.С. Шипачев. М., 2003.

[30] *Шипачев, В.С.* Задачник по высшей математике / В.С. Шипачев. М., 2004.

[31] *Шувалова, Э.З.* Повторим математику / Э.З. Шувалова, В.Т. Агафонов, Т.И. Богатырев. М., 1969.

[32] Сборник задач и упражнений по высшей математике. Общий курс / под общ. ред. А.В. Кузнецова. Минск, 1994.

# Предметный указатель

Абеля теорема, 372
Абсолютно сходящийся ряд, 367
Алгебраическое дополнение, 34
Арифметическая прогрессия, 20
Асимптоты, 224
  гиперболы, 107

Базис векторного пространства, 78
Базисный минор, 46
Бернулли
  ДУ, 346
  формула, 345
Бесконечно большая
  последовательность (ББП), 122
  функция (ББФ), 158
Бесконечно малая
  последовательность (БМП), 120
  функция (БМФ), 156
Больцано — Коши теоремы, 181
Бюджетное
  множество, 331
  ограничение, 329

Вейерштрасса
  признак, 371
  теоремы, 183
Вектор, 64
  $n$-мерный, 70
  валового выпуска, 61
  конечного продукта, 61
  предельных полезностей, 330
Векторное пространство, 71
Возрастающая
  последовательность, 128
  функция, 145
Выпуклая функция, 222
  двух переменных, 328
Вырожденная матрица, 41

Гармонический ряд, 361
Гаусса метод решения СЛАУ, 54
Геометрическая прогрессия, 20
  бесконечная, 116
Геометрический смысл
  бесконечно малой последовательности, 120
  дифференциала функции, 207
  интеграла с переменным верхним пределом, 268
  неопределенного интеграла, 231
  непрерывности в точке, 171
  несобственного интеграла
    второго рода, 291
    первого рода, 288
  ограниченной последовательности, 117
  определенного интеграла, 259
  предела
    последовательности, 119
    функции, 153
    функции двух переменных, 299

производной, 188
частных производных, 304
Гипербола, 105
Градиент, 314
График функции, 134
двух переменных, 295

Д'Аламбера признак, 364
ДУ, *см.* Дифференциальное уравнение
Действительные числа, 15
Диагональная матрица, 27
Директриса параболы, 112
Дирихле функция, 266
Дисконтирование, 285
Дифференциал функции, 206
двух переменных, 308
Дифференциальное уравнение, 334
записанное в дифференциалах, 335
разрешенное относительно производной, 335
с разделенными переменными, 340
с разделяющимися переменными, 341
Дифференциальный бином, 253
Дифференцирование, 185
Дифференцируемая функция, 204
двух переменных, 306
Домара макромодель, 339
Достаточное условие
выпуклости, 222
дифференцируемости функции двух переменных, 308
точки перегиба, 224
экстремума
второе, 220
первое, 218
функции двух переменных, 319

Евклидово пространство, 82
Единичная матрица, 27

Замечательные пределы, 165
Знакопеременный ряд, 367
Знакочередующийся ряд, 366

Изокванты, 316
Интегральная кривая ДУ, 335
Интегральный признак, 365
Интервал сходимости, 374
Иррациональные числа, 15

Капиталовооруженность, 315
Касательная, 187
Кванторы, 12
Коллинеарные векторы, 64
Координаты вектора, 66
$n$-мерного, 70
Коши
задача, 336
для ДУ второго порядка, 348
признак, 365
теорема, 210
для ДУ второго порядка, 348
для ДУ первого порядка, 336
Коэффициенты прямых затрат, 61
Крамера метод решения СЛАУ, 53
Криволинейная трапеция, 256
Кривые безразличия, 329
Кронекера — Капелли критерий, 59

Лагранжа
множителей метод, 326
теорема, 210
форма остаточного члена, 215
Лапласа теорема, 36
Лейбница
признак, 366
формула, 201
Леонтьева модель, 61
Линейная зависимость, 72



Линейно зависимые решения, 350
Линейное ДУ, 344
Линия уровня, 295
Логарифм, 141
Логарифмическая производная, 198
Лопиталя правило, 211

Маклорена
ряд, 380
формула, 215
Матрица, 26
полных затрат, 62
прямых затрат, 61
системы векторов, 76
Мексиканская шляпа, 173
Минор, 34
Многочлен, 144
Множество, 13
Монотонная
последовательность, 128
функция, 145

Натуральные числа, 14
Начальное условие, 336
Необходимое условие
дифференцируемости, 306
сходимости, 361
точки перегиба, 223
экстремума, 218
функции двух переменных, 318
Неопределенность, 177
Неопределенный интеграл, 230
Непрерывность функции, 169
двух переменных, 301
на отрезке, 181
односторонняя, 169
Непрерывные проценты, 132
Несобственный интеграл
второго рода, 291
первого рода, 286
Нечетная функция, 145
Неявно заданная функция, 136
Нормаль, 188
Ньютона — Лейбница формула, 270

Область сходимости, 369
Обратная
матрица, 40
функция, 139
Общее решение СЛАУ, 50
Общий интеграл, 338
Ограниченная
последовательность, 116
функция, 146
Однородная СЛАУ, 50
Однородное ДУ, 342
Окрестность, 117
на плоскости, 299
Окружность, 100
Определенный интеграл, 258
Определитель, 35
Орт, 64
Ортогональные
$n$-мерные векторы, 82
векторы, 65
Ортогональный базис, 84
Особое решение ДУ, 336
Остаток числового ряда, 359

Парабола, 111
Паскаля треугольник, 24
Первообразная, 229
Периодическая функция, 146
Подпространство, 80
Показательная функция, 141
Полное приращение, 302
Последовательность, 116
Потребительского выбора задача, 331
Предел
последовательности, 118

функции
двух переменных, 297
на языке окрестностей, 153
односторонний, 155
по Гейне, 150
по Коши, 153
при $x \to \infty$, 151
Предельная
выручка, 203
производительность труда, 317
фондоотдача, 317
Предельные
издержки производства, 203
полезности, 330
Признак сравнения, 363
Присоединенная матрица, 41
Продуктивная матрица, 62
Производительность труда, 315
Производная, 184
по направлению, 312
порядка $n$, 200
Производственная функция, 150
Кобба — Дугласа, 315
Прямая, 91

Равновесная цена, 150
Равномерная сходимость ряда, 371
Радиус сходимости, 374
Размерность подпространства, 80
Ранг
матрицы, 46
системы векторов, 75
Рациональная функция, 144
правильная, 244
простейшая, 239
Рациональные числа, 14
Решение
ДУ, 335
СЛАУ, 49
Ролля теорема, 209

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), 48
Скалярное произведение, 68
$n$-мерных векторов, 81
Скачок функции, 173
Сложная функция, 140
Смешанные производные, 306
Собственное значение, 85
Собственный вектор, 85
Совместная СЛАУ, 49
Соотношения баланса, 61
Сопряженные гиперболы, 110
Спектр матрицы, 86
Стационарная точка, 218
функции двух переменных, 319
Степенная функция, 141
Степенной ряд, 372
Сумма ряда, 358
Суперпозиции решений принцип, 354
Сходящаяся последовательность, 124
на плоскости, 297
Сходящийся ряд, 358

Таблица
основных интегралов, 234
основных производных, 196
эквивалентностей, 167
Тейлора
ряд, 380
критерий сходимости, 380
условие сходимости, 381
формула, 215
Теорема
аннулирования, 39
о непрерывности
обратной функции, 172
сложной функции, 171
элементарных функций, 176
о производной сложной функции, 309





о сжатой последовательности, 128
о среднем значении определенного интеграла, 264
о структуре решения неоднородного уравнения, 353
об устойчивости знака
непрерывной функции, 181
последовательности, 128
Точка, 91
безубыточности, 149
перегиба, 223
разрыва, 172
рыночного равновесия, 150
спроса, 331
Транспонированная матрица, 32
Тригонометрические функции, 143
обратные, 143

Убывающая
последовательность, 128
функция, 145
Угловой коэффициент прямой, 92
Угол между
$n$-мерными векторами, 82
векторами, 64
прямыми, 96
Уравнение связи, 325
Условно сходящийся ряд, 367
Условный экстремум, 325

Факториал, 22
Ферма теорема, 208
Формула конечных приращений, 210
Фундаментальная система решений однородной СЛАУ, 80
Функции, 133
выручки, 149
двух переменных, 294
издержек, 149
полезности, 150
двух товаров, 329
прибыли, 149
спроса и предложения, 149
спроса на товары, 332
Функциональный ряд, 369

Характеристическое уравнение
ДУ, 350
матрицы, 86

Целые числа, 14

Четная функция, 145
Частичная сумма ряда, 357
Частное решение СЛАУ, 50
Частные производные, 303
Частный интеграл, 338
Числовая функция, 133
Числовой ряд, 357

Шварца теорема, 306

Эйлера постоянная, 131
Эквивалентные
БМФ, 167
матрицы, 39
системы уравнений, 50
Экстремум, 208
глобальный, 321
функции двух переменных, 318
Эксцентриситет
гиперболы, 109
эллипса, 104
Эластичность функции, 203
двух переменных, 317
Элементарные
преобразования, 39
функции, 144
Эллипс, 101

# Список основных сокращений

$\mathbf{0}$ — нулевой вектор, 64

$A \sim B$ — эквивалентные матрицы, 39

$A^*$ — матрица, присоединенная к матрице $A$, 41

$A^{-1}$ — матрица, обратная к матрице $A$, 40

$|A| = \det A$ — определитель матрицы $A$, 32

$C_n^k$ — биномиальные коэффициенты, 23

$D(f)$ — область определения функции $f$, 133

$E(f)$ — множество значений функции $f$, 133

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, 14

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, 14

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, 15

$X \subset Y$ — $X$ является подмножеством $Y$, 13

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, 14

$\alpha(x) \sim \beta(x)$ — эквивалентные бесконечно малые функции, 167

$\exists$ — квантор существования, 12

$\forall$ — квантор всеобщности, 12

$\dfrac{\partial z}{\partial l}$ — производная функции $z$ по направлению $l$, 312

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = z'_x$ — частная производная функции $z = z(x, y)$ по переменной $x$, 303

$\infty$ — знак бесконечности, 122

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ — определенный интеграл от функции $f$, 258



$\displaystyle\int f(x)\,dx$ — неопределенный интеграл от функции $f$, 230

$\pi \approx 3{,}14$ — число $\pi$, 15

$\displaystyle\prod_{k=m}^{n} p_k$ — конечное произведение, 22

$\displaystyle\sum_{k=m}^{n} f_k$ — конечная сумма, 21

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — бесконечный числовой ряд, 357

$a \in A$ — элемент $a$ принадлежит множеству $A$, 13

$a \notin A$ — элемент $a$ не принадлежит множеству $A$, 13

$(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, 64

$\mathbf{a} \downuparrows \mathbf{b}$ — противоположно направленные векторы, 64

$\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ — сонаправленные векторы, 64

$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ — ортогональные векторы, 65

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, 68

$dy$ — дифференциал функции $y$, 206

$e \approx 2{,}72$ — постоянная Эйлера, 131

$f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ — производная функции $y = f(x)$, 185

$f^{(n)}(x)$ — производная порядка $n$ функции $f$, 200

$f^{-1}$ — функция, обратная к $f$, 139

$\operatorname{grad} z$ — градиент функции $z = z(x, y)$, 314

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ — предел последовательности $x_n$ при $n \to \infty$, 119

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ — предел функции $f(x)$ в точке $a$, 151

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ — предел функции $f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0)$, 297

$n!$ — факториал натурального числа $n$, 22

$\operatorname{rank} A$ — ранг матрицы $A$, 46

$\operatorname{sign} x$ — знак числа $x$, 136

$\{x_n\}$ — числовая последовательность, 116